

13 Consolidatie

CORRECTIESLEUTEL

Inhoud (elk onderdeel behandelt de leerstof van t.e.m. 12)

	Ken je de theorie?
	Oefeningenreeks 1 peper
	Problemen oplossen met heuristieken
blz. 14 – 22	Oefeningenreeks 2 pepers
blz. 23 – 34	Oefeningenreeks 3 pepers
blz. 35	Problemen oplossen met heuristieken
blz. 36 – 46	Oefeningenreeks 4 pepers
blz. 47 – 52	Oefeningenreeks 5 pepers
blz. 53	Problemen oplossen met heuristieken
blz. 54 – 55	Wiskunde in de economie: de budgetlijn
blz. 56	Overzichtsschema

IN DEZE CONSOLIDATIEMODULE VIND JE THEORIEVRAGEN EN HERHALINGSVRAGEN IN VERSCHILLENDE PEPERCATEGORIEËN OVER VOLGENDE MODULES:

- Module 1 tot module 8
- Module 9: Algebraïsche verbanden
- Module 10: Stelling van Pythagoras
- Module 11: Functies van de eerste graad
- Module 12: Stelling van Thales

Consolidatie betekent:

- Hoe zet ik de leerstof – verspreid over vele gehelen – vast in mijn brein?
- Ik wil mijn kennis heropfrissen en beter vasthouden.
- Ik wil beter weten waar we wat gezien en geleerd hebben.
- Om dit alles nog te versterken, staan de oefeningen van alle modules kriskras door elkaar.



TIP

- Verdeel je tijd goed over de verschillende onderdelen.
- Kies wijs.
- Als je twijfelt over wat je best eerst aanpakt, vraag raad aan je leerkracht.

Net als in studentenhaver zitten in deze module naast lekkere gedroogde vruchten ook gezonde zachte en harde noten.



Ken je de theorie?

1

Vul het juiste woord of getal in.

- a) Bv. π of $\sqrt{2}$ is een voorbeeld van een reëel getal dat een oneindig doorlopende decimale schrijfwijze heeft waar er geen repeterend deel in voorkomt.
- b) De grafiek van een constante functie is een rechte met richtingscoëfficiënt 0.
- c) In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden.
- d) Een vierhoek met vier even lange zijden noemt men een ruit.
- e) Decimale vormen die we niet als breuk kunnen schrijven noemen we irrationale getallen.
- f) De verzameling van de strikt positieve reële getallen wordt aangeduid met het symbool $\mathbb{R}_0^+$.
- g) De som van de hoeken van een vierhoek is 360°.
- h) Een functievoorschrift waarbij de grafiek van die functie een rechte is die de oorsprong bevat, is van de vorm $f(x) = ax$.
- i) De verzameling van alle punten die even ver liggen van twee punten A en B noemt men de middelloodlijn van het lijnstuk [AB].
- j) Een functie is een verband waarbij aan elke veranderlijke x hoogstens één reëel getal y kan gekoppeld worden.
- k) De verzameling van alle x -waarden waarvoor er een functiewaarde bestaat, is het domein van een functie f .
- l) De verzameling van alle mogelijke functiewaarden is het bereik van een functie f .
- m) Een x -waarde waarvoor de functiewaarde gelijk is aan nul is een nulwaarde van die functie.
- n) Thales zegt: "Een evenwijdige projectie bewaart de verhouding van lengtes van evenwijdige lijnstukken."

2

Noteer de stelling van Pythagoras in symbolen en in woorden voor de gegeven driehoek.

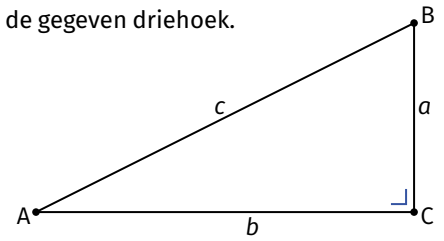
In symbolen:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

In woorden:

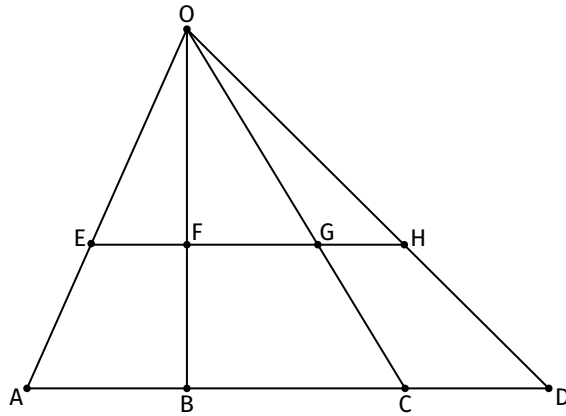
In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten

van de twee rechthoekszijden.



3

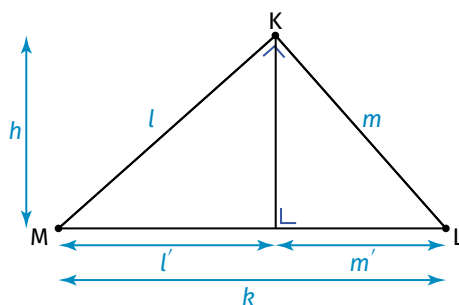
Welke meetkundige eigenschappen van de onderstaande figuur kun je met de stelling van Thales afleiden?
(EH // AD)



- $\frac{|OE|}{|OF|} = \frac{|EA|}{|FB|}$
- $\frac{|OF|}{|OG|} = \frac{|FB|}{|GC|}$
- $\frac{|OE|}{|OG|} = \frac{|EA|}{|GC|}$
- $\frac{|OF|}{|OH|} = \frac{|FB|}{|HD|}$
- $\frac{|OE|}{|OH|} = \frac{|EA|}{|HD|}$
- $\frac{|OG|}{|OH|} = \frac{|GC|}{|HD|}$

4

Noteer de metrische betrekkingen voor de rechthoekige driehoek KLM.



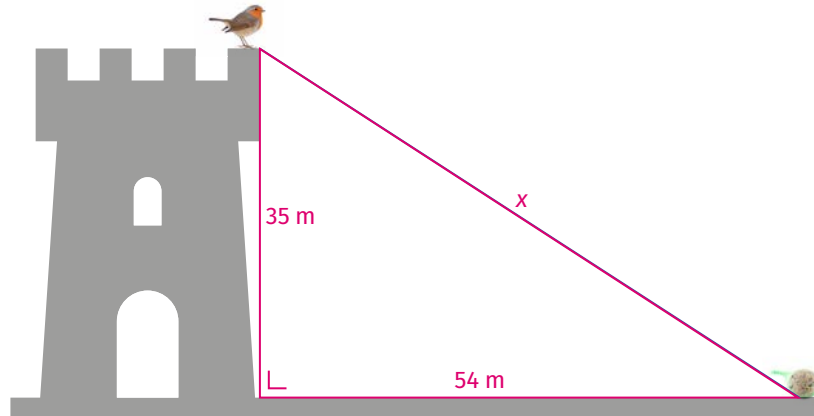
$$\begin{aligned} l^2 &= k \cdot l' \\ m^2 &= k \cdot m' \\ h^2 &= l' \cdot m' \end{aligned}$$

Oefeningenreeks 1 peper

1

Een vogel vliegt vanop een toren naar een mezenbol. De toren is 35 m hoog en de mezenbol ligt op 54 m van de toren.

Welke afstand legt de vogel af om tot bij de bol te komen? Reken uit op 1 cm nauwkeurig.



$$x^2 = 35^2 + 54^2$$

$$x = \sqrt{1225 + 2916}$$

$$x = \sqrt{4141}$$

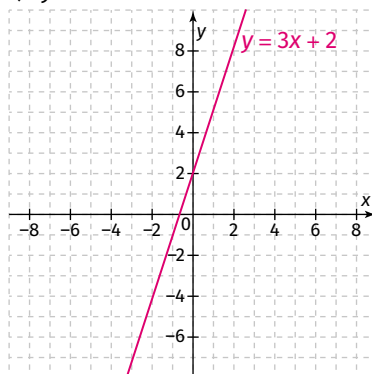
$$x \approx 64,35$$

Antwoord: De vogel vliegt ongeveer 6435 cm.

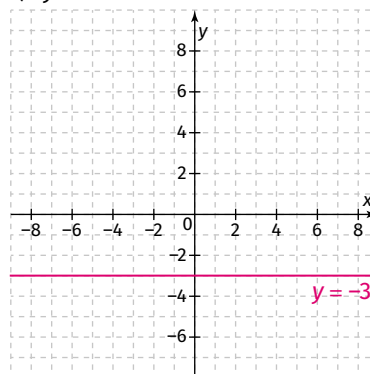
2

Teken de grafiek van de volgende rechten.

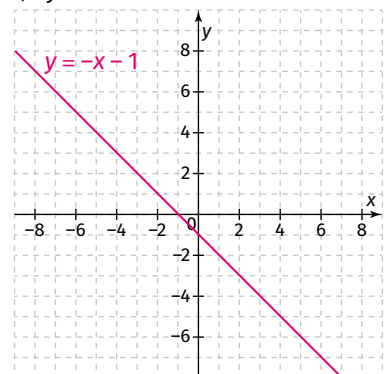
a) $y = 3x + 2$



b) $y = -3$



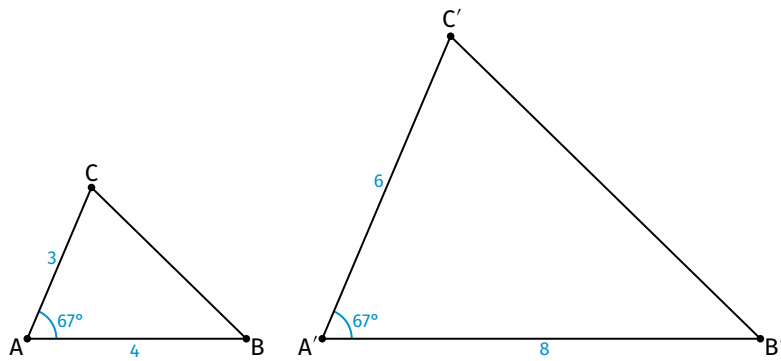
c) $y = -x - 1$



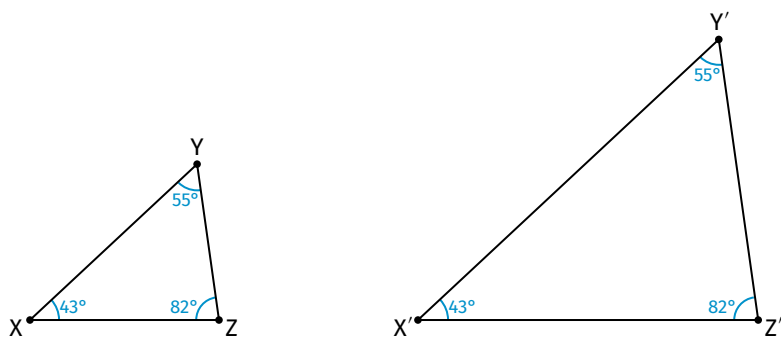
3

Volgens welk kenmerk zijn onderstaande driehoeken gelijkvormig?

a) Gelijkvormigheidskenmerk: $\frac{Z}{Z} \frac{H}{H} \frac{Z}{Z}$



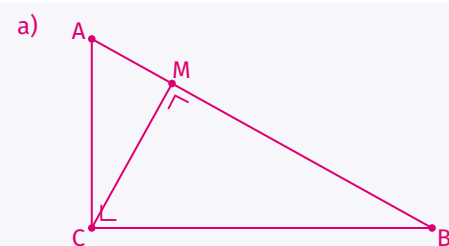
b) Gelijkvormigheidskenmerk: HH



4

Gegeven: $\triangle ABC$ is rechthoekig in C
[CM] is de hoogtelijn uit C

Gevraagd: a) Maak een passende tekening.
b) Noteer de stelling van Pythagoras voor elke rechthoekige driehoek.

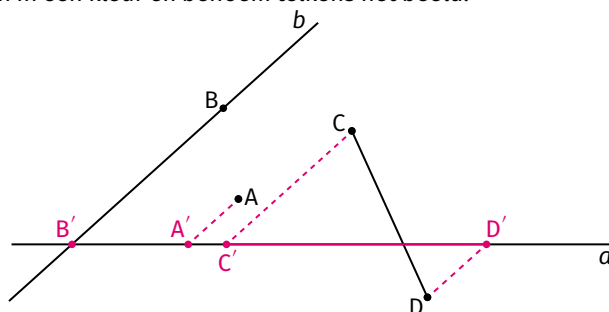


b) In $\triangle ABC$:
 $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$
In $\triangle BCM$:
 $|BC|^2 = |CM|^2 + |BM|^2$
In $\triangle AMC$:
 $|AC|^2 = |AM|^2 + |CM|^2$

5

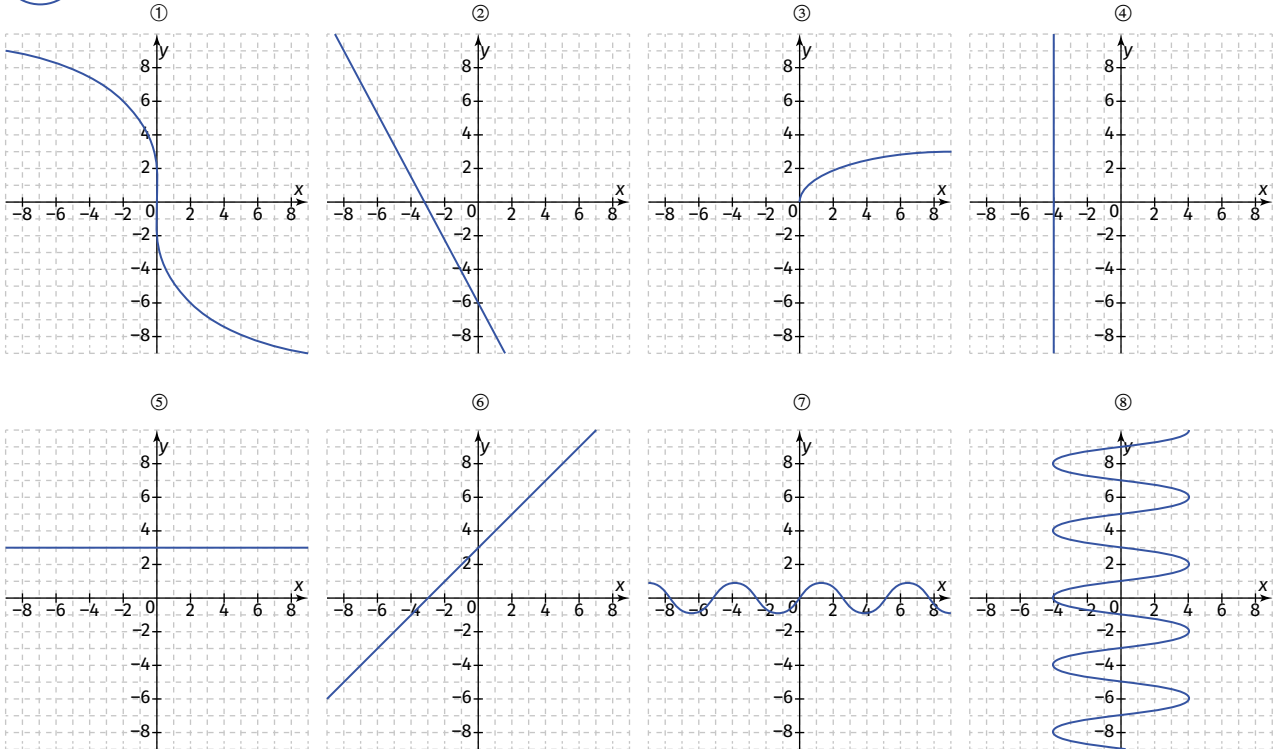
Bepaal $p_a^b(A) = A'$, $p_a^b(B) = B'$ en $p_a^b([CD])$.

Duid de beelden aan in een kleur en benoem telkens het beeld.



6

Bekijk onderstaande grafieken.



a) Welke van de bovenstaande grafieken zijn grafieken van een functie?

De grafieken 1, 2, 3, 5, 6 en 7.

b) Hoe herken je de grafiek van een functie?

Bij elke x -waarde die een functiewaarde heeft, hoort hoogstens één y -waarde.

c) Welke van de bovenstaande grafieken zijn grafieken van eerstegraadsfuncties?

De grafieken 2 en 6.

d) Hoe herken je de grafiek van een eerstegraadsfunctie?

De grafieken zijn rechten die niet evenwijdig zijn met de x - of y -as.

e) Welke van de bovenstaande grafieken zijn grafieken van een constante functie?

De grafiek 5.

f) Hoe herken je de grafiek van een constante functie?

De grafieken zijn rechten evenwijdig met de x -as.



7

Bereken.

$$\text{a) } \sqrt{\frac{288}{2}} = \sqrt{144} = 12$$

$$\text{b) } \sqrt{a^2} = a$$

$$\text{c) } \sqrt{20+5} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{d) } (\sqrt{6})^2 = 6$$

$$\text{e) } \sqrt{144 \cdot 0} = \sqrt{0} = 0$$

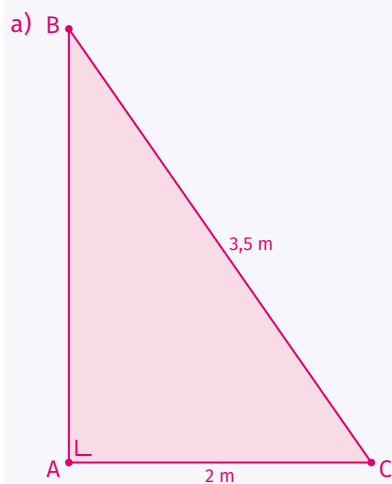
8

Stel de volgende situatie voor op een schets. Duid de afmetingen aan.

Een ladder van 3,5 m wordt op 2 m afstand tegen een muur geplaatst.

a) Kleur de rechthoekige driehoek.

b) Formuleer de stelling van Pythagoras voor deze driehoek.



$$\text{b) } |BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$$

$$3,5^2 = 2^2 + |AB|^2$$

9

Los op in $\mathbb{R}$.

a) $3x - 8 = 16$

$$\begin{aligned} 3x &= 16 + 8 \\ 3x &= 24 \\ x &= \frac{24}{3} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

c) $-17 = 5x - 2$

$$\begin{aligned} -17 + 2 &= 5x \\ -15 &= 5x \\ \frac{-15}{5} &= x \\ -3 &= x \end{aligned}$$

e) $-x - 3 = -11$

$$\begin{aligned} -x &= -11 + 3 \\ -x &= -8 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

b) $-3(x + 2) = 5$

$$\begin{aligned} -3x - 6 &= 5 \\ -3x &= 5 + 6 \\ -3x &= 11 \\ x &= \frac{-11}{-3} \end{aligned}$$

d) $-4x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} -4x &= \frac{-3}{4} + \frac{2}{4} \\ -4x &= \frac{-1}{4} \\ x &= \frac{-1}{4 \cdot (-4)} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

f) $2,5 = 5(x - 1,5)$

$$\begin{aligned} 2,5 &= 5x - 7,5 \\ 2,5 + 7,5 &= 5x \\ 10 &= 5x \\ \frac{10}{5} &= x \\ 2 &= x \end{aligned}$$

10

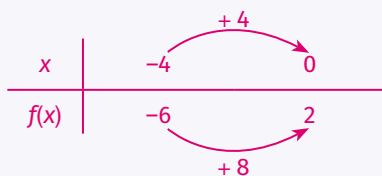
Zijn de volgende functies stijgend ($\nearrow$) of dalend ($\searrow$)?

functie	$\nearrow$ of $\searrow$
$f(x) = -6 + 2x$	$\nearrow$
$g(x) = \frac{4}{7}x - 1$	$\nearrow$

functie	$\nearrow$ of $\searrow$
$h(x) = 5 - 0,5x$	$\searrow$
$i(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x$	$\searrow$

11

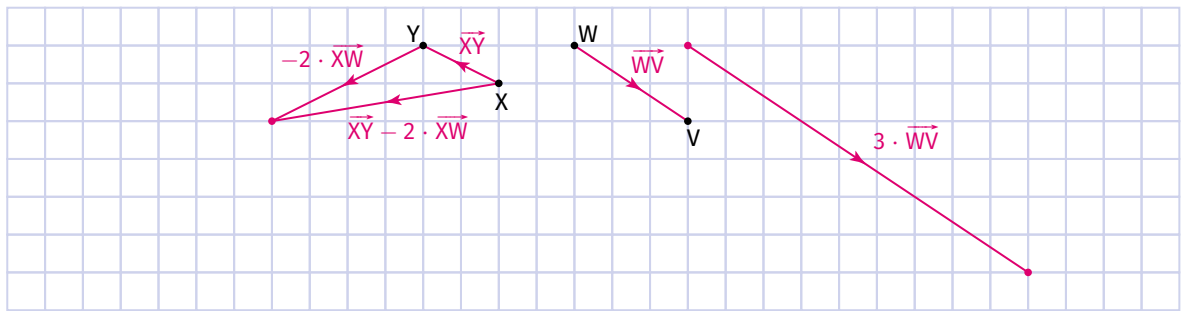
Bepaal de richtingscoëfficiënt van de rechte die door A(0, 2) en B(-4, -6) gaat.

• 

• $\frac{8}{4} = 2 \rightarrow$ De richtingscoëfficiënt is 2.

12

Teken de vectoren $\vec{XY}$, $3 \cdot \vec{WV}$ en $\vec{XY} - 2 \cdot \vec{XW}$.

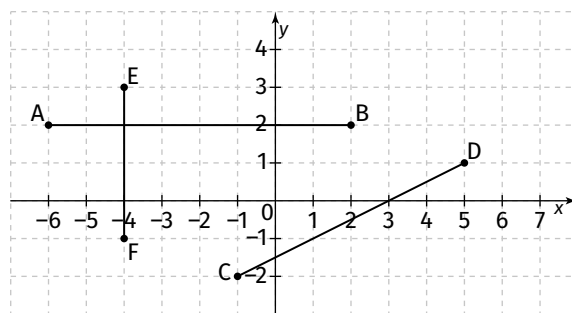


13

Bepaal de lengte van de getekende lijnstukken.

Werk zo eenvoudig mogelijk.

Werk op 0,1 nauwkeurig.



$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(2 - (-6))^2 + (2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{(2 + 6)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{8^2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |CD| &= \sqrt{(5 - (-1))^2 + (1 - (-2))^2} \\ &= \sqrt{(5 + 1)^2 + (1 + 2)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{36 + 9} \\ &= \sqrt{45} \\ &\approx 6,7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |EF| &= \sqrt{(-4 - (-4))^2 + (-1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-4 + 4)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{0^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

14

Noteer het functievoorschrift van de rechte s met richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{2}$ die door het punt $(0, 5)$ gaat.

$$s(x) = -\frac{3}{2}x + 5$$

15

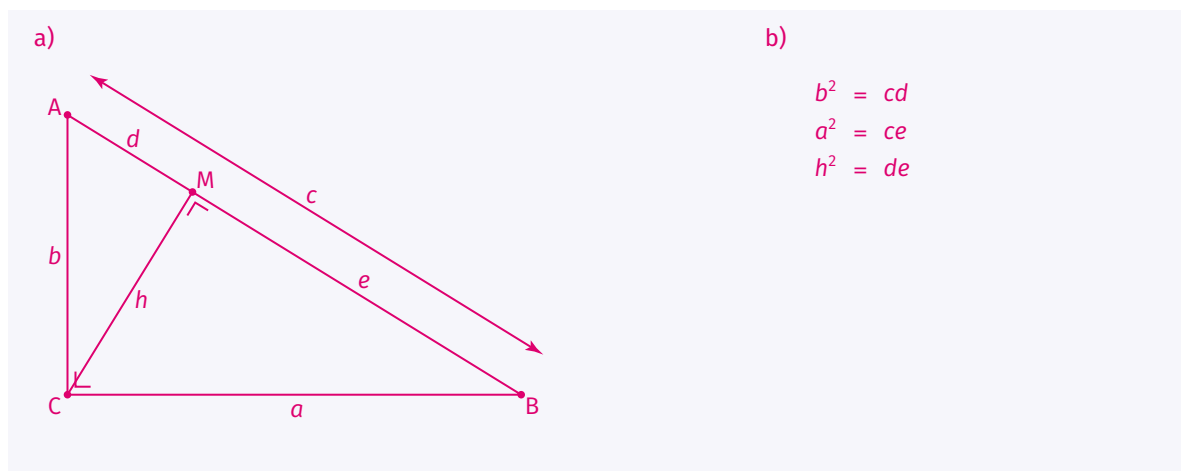
- a) Kleur het functievoorschrift van alle eerstegraadsfuncties groen.
 b) Kleur het functievoorschrift van alle constante functies blauw.

$f(x) = -2$	$g(x) = x^2 - 3$	$h(x) = \frac{7x+1}{2}$	$i(x) = 4x - 3$
$j(x) = \sqrt{3}x - 2$	$k(x) = -5x$	$l(x) = -x^3 - 1$	$m(x) = \sqrt{10}$

16

Gegeven: $\triangle ABC$ is rechthoekig in C
 [CM] is de hoogtelijn uit C

- Gevraagd:** a) Maak een passende tekening.
 b) Noteer de metrische betrekkingen.



17

Bepaal telkens de coördinaat van het midden M van het lijnstuk [CD] als ...

- a) C(-3, 2) en D(2, 1) dus M($-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$)
 b) C(0, 2) en D(-2, -2) dus M(-1 , 0)
 c) C(-1, 5) en D(6, 3) dus M($\frac{5}{2}$, 4)

18

Gegeven: $\triangle ABC$ met $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 16$ cm en $|AC| = 9$ cm
 $\triangle DEF$ met $|DE| = 30$ cm, $|EF| = 42$ cm en $|DF| = 27$ cm
 Is $\triangle ABC \sim \triangle DEF$? Verklaar je antwoord.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{|AC|}{|DF|} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{|BC|}{|EF|} = \frac{16}{42} = \frac{8}{21}$$

dus $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} \neq \frac{|BC|}{|EF|}$ en dus $\triangle ABC$ is niet gelijkvormig met $\triangle DEF$.

19

Gegeven $a \parallel b \parallel c$
 $a \not\parallel d$
 $a \not\parallel e$

Gevraagd: x

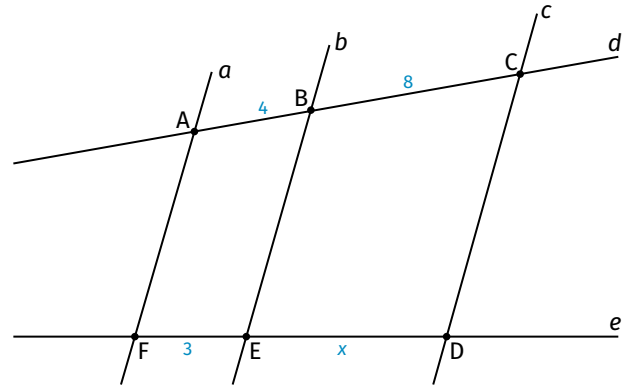
$$\frac{|AB|}{|FE|} = \frac{|BC|}{|ED|}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{x}$$

$$4x = 8 \cdot 3$$

$$x = \frac{24}{4}$$

$$x = 6$$



20

In de grootste autofabriek ter wereld van Hyundai wordt er 1 auto geproduceerd om de 15 seconden. De functie f geeft het aantal auto's weer die in de fabriek geproduceerd worden in functie van het aantal uur.



- a) Wat is de afhankelijke variabele (weergegeven op de y-as) en wat is de onafhankelijke variabele (weergegeven op de x-as)?

De afhankelijke variabele is het aantal auto's die geproduceerd worden en de onafhankelijke variabele is het aantal uur.

- b) Hoeveel auto's worden er geproduceerd in een minuut?

$60 : 15 = 4$ Antwoord: In een minuut worden er 4 auto's geproduceerd.

- c) Hoeveel auto's worden er geproduceerd in een uur?

$4 \cdot 60 = 240$ Antwoord: In een uur worden er 240 auto's geproduceerd.

- d) Vul de woordformule aan.

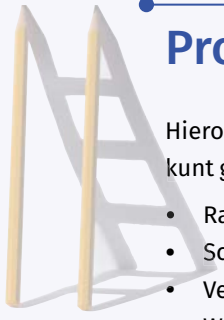
Het aantal geproduceerde auto's is gelijk aan 240 keer het aantal uur.

- e) Stel het functievoorschrift van f op.



x en y zijn recht evenredige grootheden; de grafiek van f is een rechte door de oorsprong.

$f(x) = 240x$



Problemen oplossen met heuristieken

Hieronder vind je twee problemen. Je moet zelf een oplossingsstrategie kiezen en nagaan welke wiskundekennis je kunt gebruiken om het probleem op te lossen.

- Raadpleeg je vademecum om een gepaste heuristiek te kiezen en denk soms out of the box.
- Schrijf jouw oplossing netjes uit zodat je die kunt presenteren voor andere leerlingen.
- Vergelijk jouw oplossing met die van een andere leerling.
- Werk samen en kom tot nieuwe inzichten bij het oplossen van problemen.

Probleem 1

Verdeel 150 in twee getallen, waarbij het ene 150 % van het andere is.

Gekozen heuristiek: Het probleem oplossen door een vergelijking op te stellen.

Eerste getal: x

Tweede getal: $1,5x$

$$x + 1,5x = 150$$

$$2,5x = 150$$

$$x = 150 : 2,5$$

$$x = 60$$

Antwoord: Het eerste getal is 60 en het tweede getal is 90.

Probleem 2

Bereken het aantal zijden van de veelhoek als je weet dat de som van de hoeken gelijk is aan 4860° .

Gekozen heuristiek: Patronen en regelmaat herkennen, een eigenschap gebruiken, probleem oplossen door een vergelijking op te lossen.

De som van de hoeken van een driehoek is $180^\circ (= 1 \cdot 180^\circ)$

De som van de hoeken van een vierhoek is $360^\circ (= 2 \cdot 180^\circ)$

De som van de hoeken van een vijfhoek is $540^\circ (= 3 \cdot 180^\circ)$

De som van de hoeken van een n -hoek is $(n - 2) \cdot 180^\circ$

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 4860^\circ$$

$$n - 2 = 4860^\circ : 180^\circ$$

$$n - 2 = 27$$

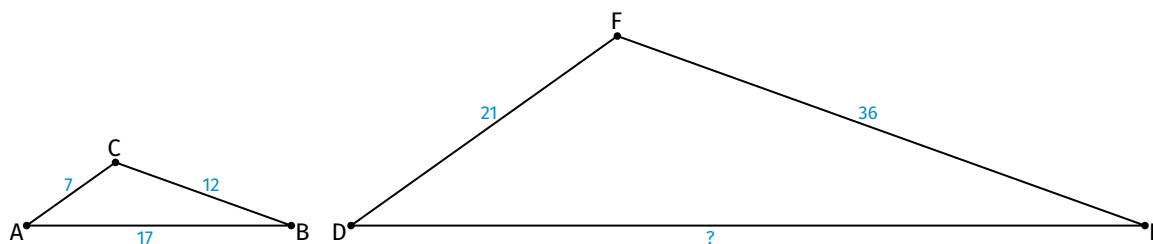
$$n = 29$$

Antwoord: De veelhoek heeft 29 zijden.

Oefeningenreeks 2 pepers

21

Bereken $|DE|$ als je weet dat $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Noteer je volledige berekening.



$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|BC|}$$

$$\begin{aligned} |DE| &= 3 \cdot 17 \\ &= 51 \end{aligned}$$

$$\frac{|DE|}{17} = \frac{21}{7} = \frac{36}{12} = 3$$



22

Bepaal de omtrek van het getekende trapezium.

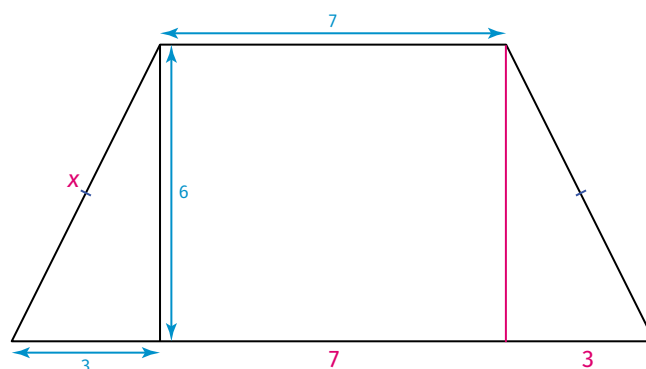
$$x^2 = 6^2 + 3^2$$

$$x = \sqrt{36 + 9}$$

$$x = \sqrt{45}$$

$$x = 3\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} p_{\text{trapezium}} &= 7 + 3\sqrt{5} + 13 + 3\sqrt{5} \\ &= 20 + 6\sqrt{5} \end{aligned}$$



23

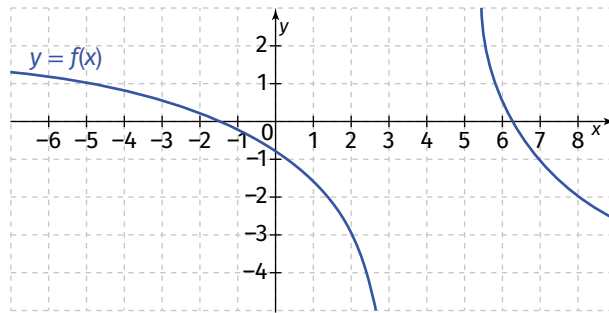
Lees de volgende functiewaarden en originelen af van de grafiek.

a) $f\left(\begin{array}{c} 2 \end{array}\right) = -3$

b) $f(-5) = \begin{array}{c} 1 \end{array}$

c) $f(7) = \begin{array}{c} -1 \end{array}$

d) $f(8) = \begin{array}{c} -2 \end{array}$



24

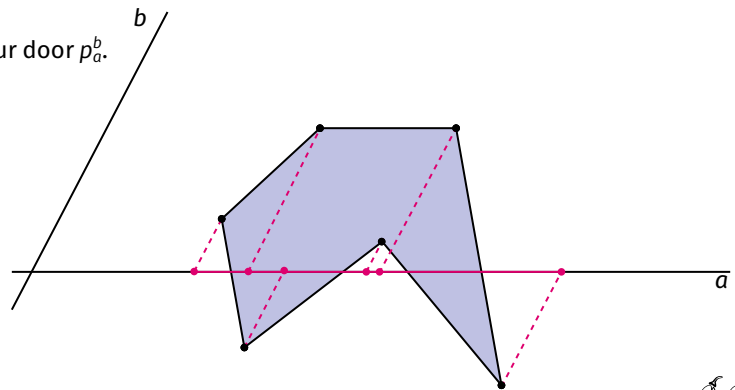
Omcirkel de rechthoekszijden.

a) $\triangle ABC$ met $\hat{A} = 90^\circ$ [AB] [BC] [AC]

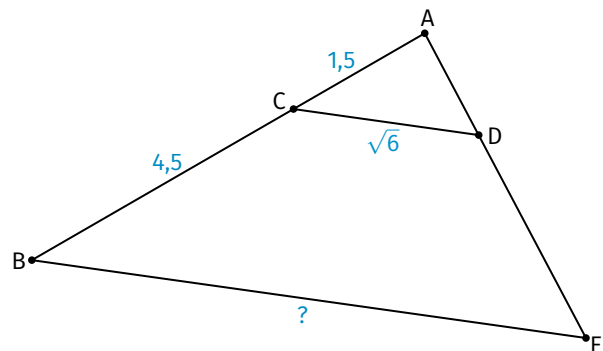
b) $\triangle RST$ met $\hat{T} = 90^\circ$ [RS] [ST] [RT]

c) $\triangle ZYX$ met $\hat{Y} = 90^\circ$ [XY] [XZ] [YZ]

25

Bepaal het beeld van de volgende figuur door p_a^b .
Duid het beeld aan in een kleur.

26

Bepaal de lengte $|BE|$ als je weet dat $CD \parallel BE$.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \text{ (gemeenschappelijke hoek)} \\ \hat{C} = \hat{B} \text{ (overeenkomstige hoeken bij } CD \parallel BE \text{ en snijlijn AB)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ABE$$

$$\text{dus } \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|CD|}{|BE|}$$

$$\frac{1,5}{1,5 + 4,5} = \frac{\sqrt{6}}{|BE|}$$

$$\frac{1,5}{6} = \frac{\sqrt{6}}{|BE|}$$

$$1,5|BE| = 6\sqrt{6}$$

$$|BE| = \frac{6\sqrt{6}}{1,5}$$

$$|BE| = 4\sqrt{6}$$

27

Geef de tekentabel van de volgende eerstegraadsfunctie.

$$f(x) = 3x + 3,5$$

x		$-\frac{7}{6}$	
f(x)	-	0	+



28

Schrijf als een macht met een positieve exponent door de rekenregels van machten toe te passen.

$$a) (-2x^3)^4 = (-2)^4 \cdot x^{12} = 2^4 x^{12} = 16x^{12}$$

$$b) 3^{-4} \cdot 3 \cdot 3^2 = 3^{-4} \cdot 3^1 \cdot 3^2 = 3^{-4+1+2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$c) 4b^{-3} \cdot (-3)b = 4b^{-3} \cdot (-3)b^1 = -12b^{-2} = \frac{-12}{b^2}$$

$$d) \frac{-3}{4} : \left(\frac{-3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{-3}{4}\right)^1 : \left(\frac{-3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{-3}{4}\right)^{1-(-2)} = \left(\frac{-3}{4}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{4^3} = \frac{-27}{64}$$



29

Zet om naar een decimale vorm.

$$a) \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2,4$$

$$b) \frac{3}{125} = \frac{24}{1000} = 0,024$$

$$c) \frac{42}{60} = \frac{7}{10} = 0,7$$

$$d) \frac{-5}{8} = \frac{-625}{1000} = -0,625$$



30

Noteer in wetenschappelijke notatie.

a) $345\,000\,000 = 3,45 \cdot 10^8$

b) $0,000\,000\,000\,01 = 1 \cdot 10^{-11}$

c) $13,5 \cdot 10^3 = 1,35 \cdot 10^4$



31

Bereken.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{27} &= 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 27} \\ &= 6 \cdot \sqrt{81} \\ &= 6 \cdot 9 \\ &= 54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{8} &= -8 \cdot 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 8} \\ &= -16 \cdot \sqrt{16} \\ &= -16 \cdot 4 \\ &= -64 \end{aligned}$$

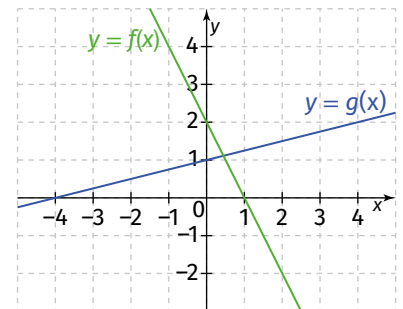
$$\begin{aligned} \text{b) } -4\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot (-3\sqrt{10}) &= -4 \cdot (-3) \cdot \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10} \\ &= 12 \cdot \sqrt{100} \\ &= 12 \cdot 10 \\ &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 5 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} &= 5 \cdot \sqrt{20} \\ &= 5 \cdot \sqrt{4 \cdot 5} \\ &= 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \\ &= 10\sqrt{5} \end{aligned}$$



32

Gegeven: de grafieken van de functies f en g .
Stel het functievoorschrift op van f en g aan de hand van de grafiek.

Voor de functie f :

$y = -2x + 2$

Schrap wat fout is.

De functie f is ~~stijgend~~ – dalend.

Bepaal de nulpunten. (Lees af op de grafiek)

Nulpunt van f is: $(1, 0)$

Voor de functie g :

$y = \frac{1}{4}x + 1$

Schrap wat fout is.

De functie g is ~~stijgend~~ – dalend.

Nulpunt van g is: $(-4, 0)$



33

Maak de noemer wortelvrij.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{5}{\sqrt{98}} &= \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{7 \cdot 2} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{36\sqrt{5}}{3\sqrt{10}} &= \frac{\overset{12}{\cancel{36}} \sqrt{5}}{\overset{1}{\cancel{3}} \sqrt{\cancel{10}} \sqrt{2}} \\ &= \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{\overset{6}{\cancel{12}} \sqrt{2}}{\cancel{2}_1} \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{-2}{\sqrt{18}} &= \frac{-2 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{-\cancel{2}\sqrt{2}}{3 \cdot \cancel{2}} \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -\frac{2\sqrt{3}}{12\sqrt{15}} &= -\frac{\overset{1}{\cancel{2}} \sqrt{3}}{\overset{6}{\cancel{12}} \sqrt{\cancel{15}} \sqrt{5}} \\ &= -\frac{1 \cdot \sqrt{5}}{6\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{6 \cdot 5} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{30} \end{aligned}$$



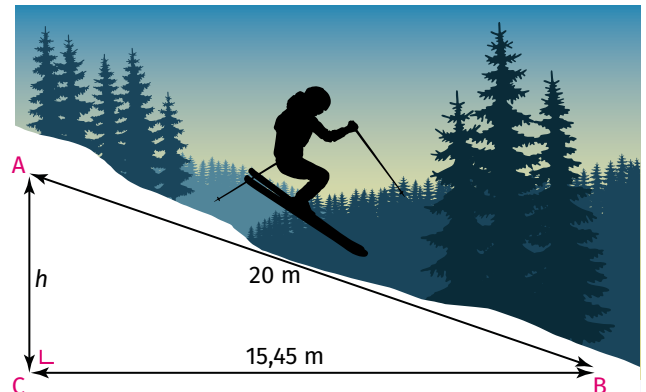
34

Een skiër daalt een helling af. Hij legt een afstand van 20 m langsheen de helling af. Hoeveel meter lager bevindt hij zich dan? Rond af op 1 cm.

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 \\ 20^2 &= h^2 + 15,45^2 \\ 20^2 - 15,45^2 &= h^2 \\ 161,2975 &= h^2 \\ 12,70 &\approx h \end{aligned}$$

Antwoord:

Hij bevindt zich dan ongeveer 12,70 m lager.



35

Bereken van de volgende functies de nulwaarde en geef het bijhorende nulpunt.

a) $f(x) = 4x - 12$

$$\begin{aligned} 4x - 12 &= 0 \\ 4x &= 12 \\ x &= \frac{12}{4} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

De nulwaarde is 3.
Het nulpunt is (3, 0).

b) $g(x) = -14x + 28$

$$\begin{aligned} -14x + 28 &= 0 \\ -14x &= -28 \\ x &= \frac{-28}{-14} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

De nulwaarde is 2.
Het nulpunt is (2, 0).

c) $h(x) = -4x + 36$

$$\begin{aligned} -4x + 36 &= 0 \\ -4x &= -36 \\ x &= \frac{-36}{-4} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

De nulwaarde is 9.
Het nulpunt is (9, 0).



36

Bereken door gebruik te maken van de formules van merkwaardige producten.

$$a) (x^2 + 0,5) \cdot (x^2 - 0,5) = x^4 - 0,25$$

$$b) (a^3 - 4)^2 = a^6 - 8a^3 + 16$$

$$c) (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) = x^2 - 3$$

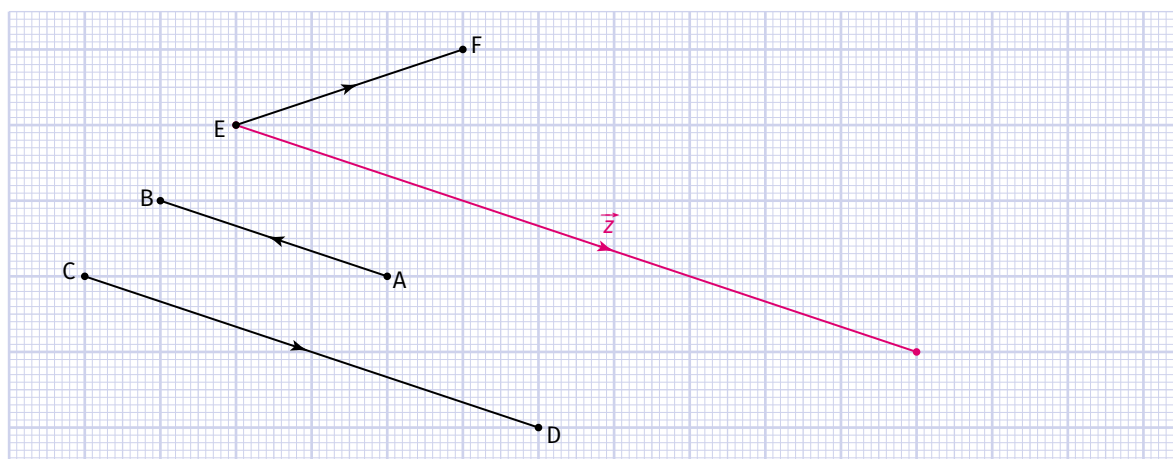
$$d) (2x + 5y)^2 = 4x^2 + 20xy + 25y^2$$



37

Hieronder werden de vectoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ en $\overrightarrow{EF}$ getekend. Teken de vector $\vec{z}$ die voldoet aan de volgende voorwaarden:

- dezelfde richting als $\overrightarrow{CD}$
- tegengestelde zin als $\overrightarrow{AB}$
- zelfde beginpunt als $\overrightarrow{EF}$
- $\|\vec{z}\| = 3 \|\overrightarrow{EF}\|$



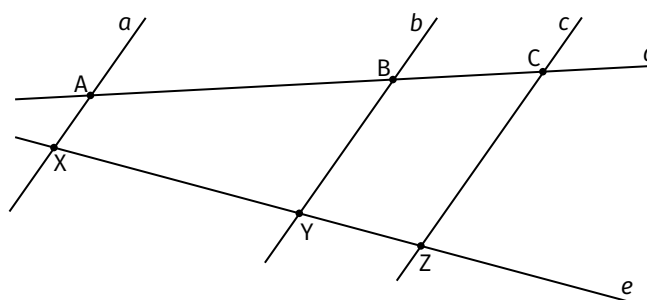
38

Bereken de gevraagde lengte met behulp van de stelling van Thales.

Gegeven: $a \parallel b \parallel c$

$$|AB| = 9 \text{ en } |BC| = 5$$

$$|XZ| = 12$$

Gevraagd: $|XY|$ en $|YZ|$ 

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{|AB|}{|XY|} &= \frac{|BC|}{|YZ|} \\ \frac{9}{12 - |YZ|} &= \frac{5}{|YZ|} \end{aligned}$$

$$9|YZ| = 5 \cdot 12 - 5|YZ|$$

$$14|YZ| = 60$$

$$|YZ| = \frac{60}{14}$$

$$|YZ| = \frac{30}{7}$$

$$\bullet \quad |XZ| = |XY| + |YZ|$$

$$12 = |XY| + \frac{30}{7}$$

$$|XY| = 12 - \frac{30}{7}$$

$$|XY| = \frac{54}{7}$$



39

Los de vergelijking op in $\mathbb{R}$.

a) $4x - 5 = 2x + 3$

$$4x - 2x = 3 + 5$$

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

c) $0,6x + 2 = 0,5 - 0,9x$

$$0,6x + 0,9x = 0,5 - 2$$

$$1,5x = -1,5$$

$$x = -\frac{1,5}{1,5}$$

$$x = -1$$

b) $\frac{4}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x - 2$

$$\frac{4}{3}x - \frac{3}{4}x = -2 - \frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{12}x = \frac{-8}{3}$$

$$x = \frac{-8}{\frac{7}{12}} \cdot \frac{12^4}{7}$$

$$x = \frac{-32}{7}$$

d) $-3x + 5 = -6\left(3x - \frac{4}{3}\right)$

$$-3x + 5 = -18x + 8$$

$$-3x + 18x = 8 - 5$$

$$15x = 3$$

$$x = \frac{3}{15}$$

$$x = \frac{1}{5}$$



40

a) Bepaal $\text{co}(X)$ en $\text{co}(Y)$.

$$X(-3, 2)$$

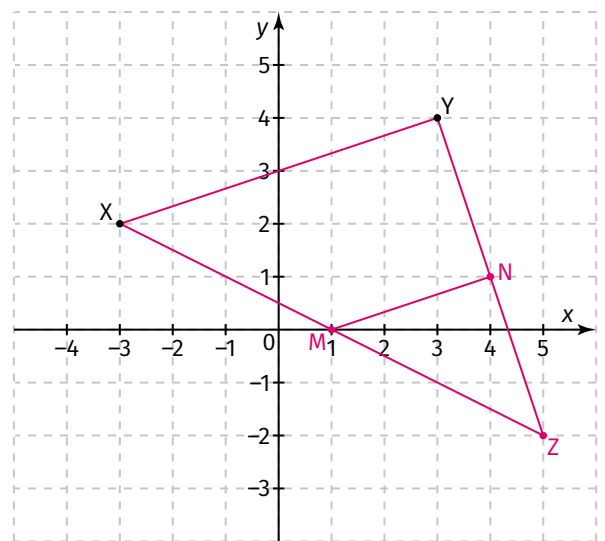
$$Y(3, 4)$$

b) Teken $Z(5, -2)$.c) Bepaal $\text{co}(M)$ als M het midden is van $[XZ]$.

$$M\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right) = M(1, 0)$$

d) Bepaal $\text{co}(N)$ als N het midden is van $[YZ]$.

$$N\left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = N(4, 1)$$

e) Teken de middenparallel in $\triangle XYZ$ die evenwijdig is aan XY .

41

Los de vergelijking op in $\mathbb{R}$.

a) $3x - 5 = 2(x + 4)$

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 2x + 8 \\ 3x - 2x &= 8 + 5 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

c) $-4\left(2x - \frac{3}{2}\right) = -5x$

$$\begin{aligned} -8x + 6 &= -5x \\ -8x + 5x &= -6 \\ -3x &= -6 \\ x &= \frac{-6}{-3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b) $0,3x - 2 = 0,25 + 1,2x$

$$\begin{aligned} 0,3x - 1,2x &= 0,25 + 2 \\ -0,9x &= 2,25 \\ x &= \frac{2,25}{-0,9} \\ x &= -2,5 \end{aligned}$$

c) $\frac{5}{3}x - \frac{3}{5} = \frac{1}{2} - x$

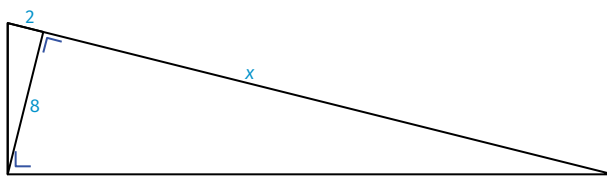
$$\begin{aligned} \frac{50}{30}x - \frac{18}{30} &= \frac{15}{30} - \frac{30}{30}x \\ 50x - 18 &= 15 - 30x \\ 50x + 30x &= 15 + 18 \\ 80x &= 33 \\ x &= \frac{33}{80} \\ x &= 0,4125 \end{aligned}$$



42

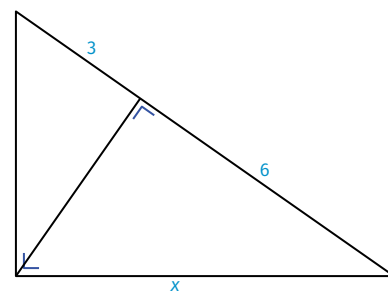
Bereken x in de volgende figuren.

a)



$$\begin{aligned} 8^2 &= 2 \cdot x \\ x &= \frac{64}{2} \\ x &= 32 \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} x^2 &= 6 \cdot 3 \\ x^2 &= 18 \\ x &= \sqrt{18} \\ x &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

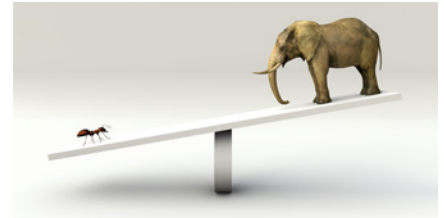


43

Zes standen van de wipplank worden beschreven met volgende functies:

$$\begin{aligned} a(x) &= 3x & c(x) &= \frac{x}{4} & e(x) &= x \\ b(x) &= -3x & d(x) &= -\frac{1}{2}x & f(x) &= \frac{7}{4}x \end{aligned}$$

Rangschik de functies zodat de mier van hoog naar laag zakt.



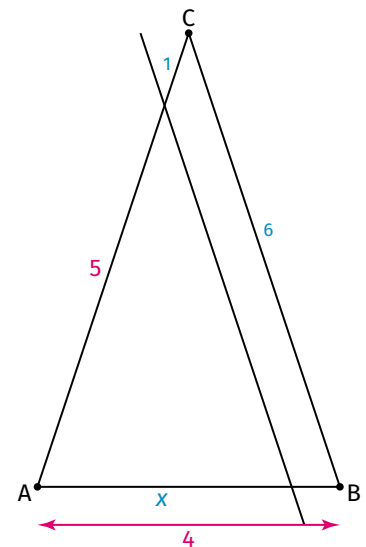
$b(x) = -3x$	$d(x) = -\frac{1}{2}x$	$c(x) = \frac{x}{4}$	$e(x) = x$	$f(x) = \frac{7}{4}x$	$a(x) = 3x$
--------------	------------------------	----------------------	------------	-----------------------	-------------



44

Een snijlijn is evenwijdig met CB en maakt van een gelijkbenige driehoek met benen van 6 cm en een basis van 4 cm een verkleinde driehoek waardoor één van de benen 1 cm korter wordt, zoals aangegeven op de figuur. Bereken de lengte van de basis van de nieuwe driehoek.

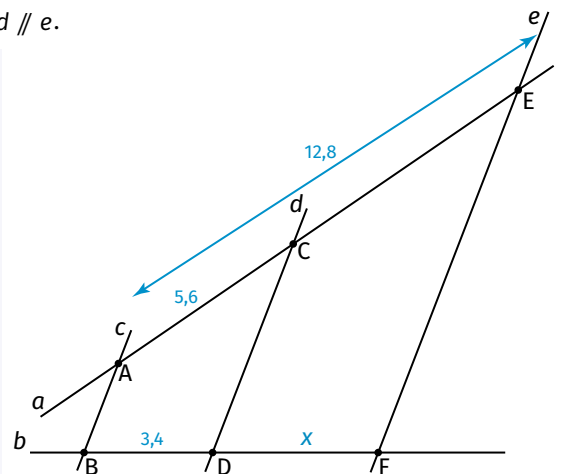
$$\begin{aligned} \frac{5}{x} &= \frac{6}{4} \\ 6x &= 20 \\ x &= \frac{20}{6} \\ x &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$



45

Bereken x op 2 decimalen nauwkeurig als je weet dat $c \parallel d \parallel e$.

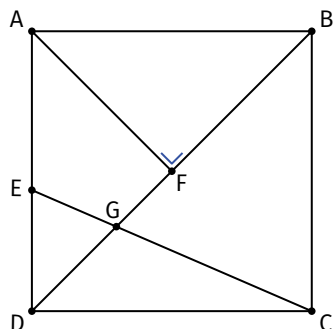
- $|CE| = 12,8 - 5,6 = 7,2$
- $\frac{5,6}{7,2} = \frac{3,4}{x}$
- $5,6x = 3,4 \cdot 7,2$
- $5,6x = 24,48$
- $x = \frac{24,48}{5,6}$
- $x \approx 4,37$



Oefeningenreeks 3 pepers

46

Gegeven: ABCD is een vierkant
Gevraagd: Waar of niet waar? Duid aan.



$$|BC|^2 + |CD|^2 = |BD|^2$$

WAAR / NIET WAAR

$$|AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2$$

WAAR / NIET WAAR

$$|EG|^2 + |GD|^2 = |ED|^2$$

WAAR / NIET WAAR

$$|AF|^2 + |FD|^2 = |AD|^2$$

WAAR / NIET WAAR

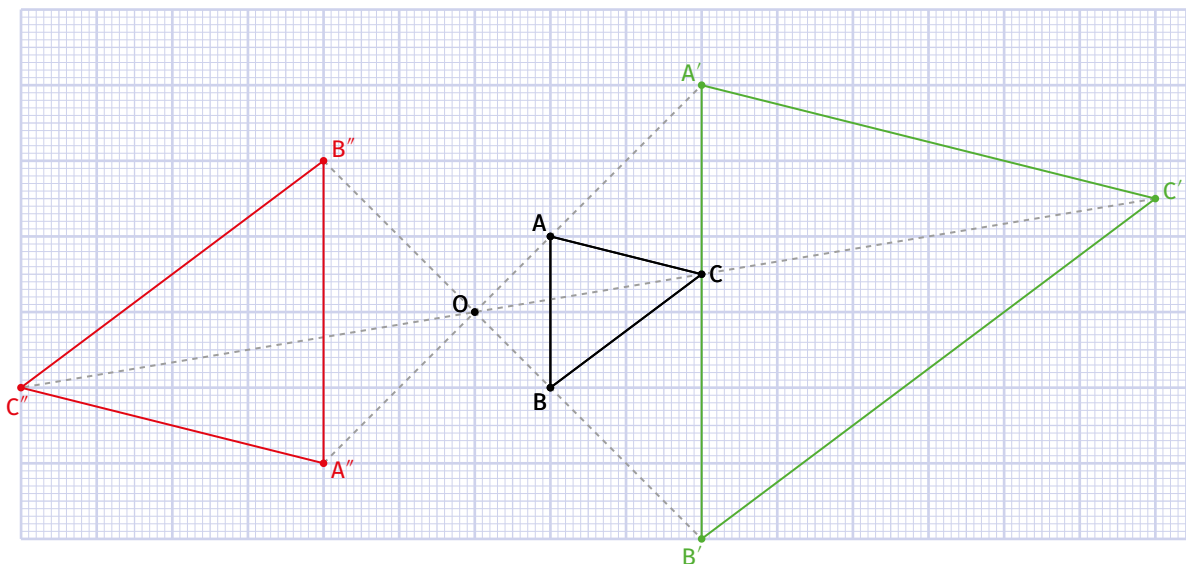
$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

WAAR / NIET WAAR



47

Teken het beeld van $\triangle ABC$ door de homothetie met centrum O en factor 3 (in groen) en factor -2 (in rood).



48

a) Bepaal het functievoorschrift van f .

$$f(x) = -2x + 2$$

b) Vul aan.

$$f(2) = -2$$

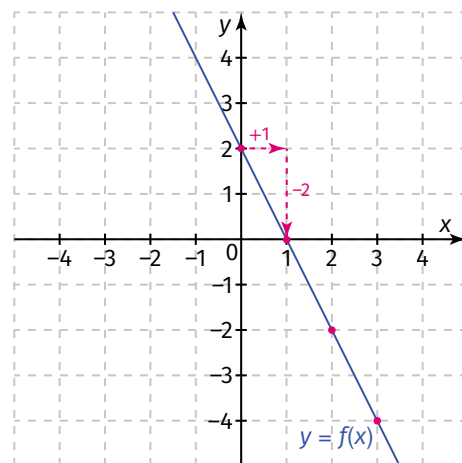
$$f(0) = 2$$

$$f(5) = -2 \cdot 5 + 2 = -8$$

$$f(3) = -4$$

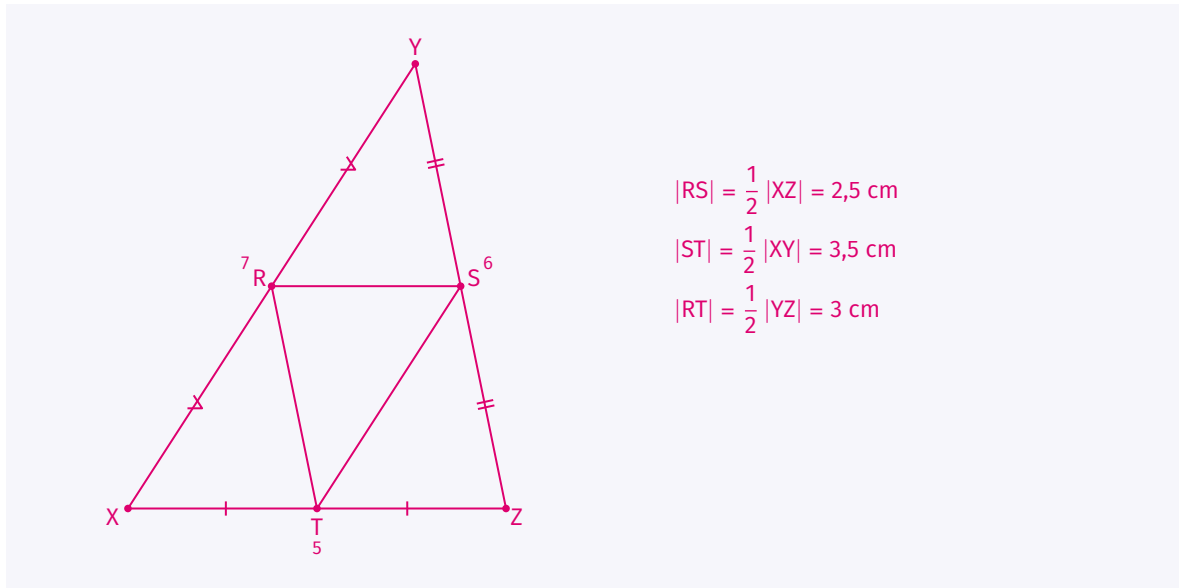
$$f(-15) = -2 \cdot (-15) + 2 = 32$$

$$f(1) = 0$$



49

De lengtes van de zijden in $\triangle XYZ$ zijn $|XY| = 7$ cm, $|YZ| = 6$ cm en $|XZ| = 5$ cm. De middens van de zijden noemen we respectievelijk R, S en T. De drie middenparallelle van de driehoek worden getekend. Bepaal $|RS|$, $|ST|$ en $|RT|$.



50

Maak de passende verbindingen.

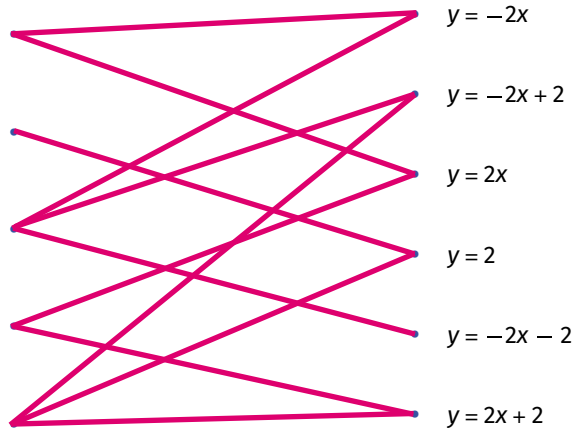
De grafiek van de functie is een rechte door de oorsprong.

De grafiek van de functie is een rechte evenwijdig met de x-as.

De grafiek van de functie is een dalende rechte.

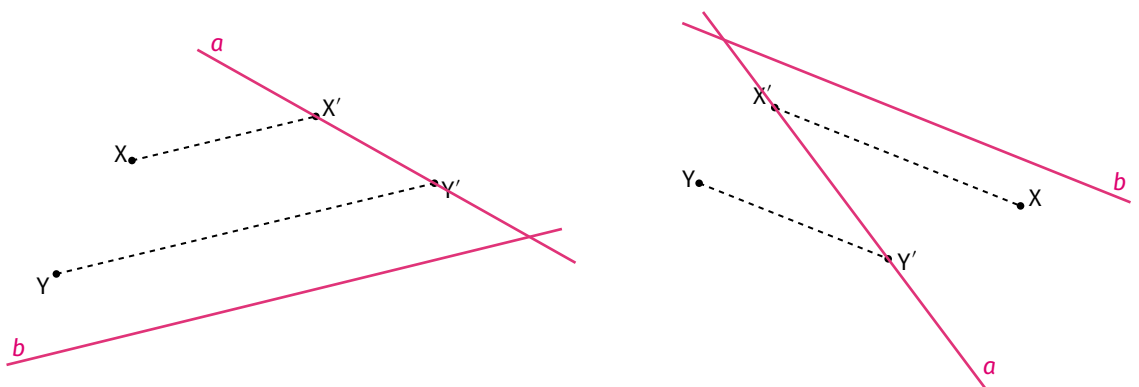
De grafiek van de functie is een stijgende rechte.

De grafiek van de functie snijdt de y-as in $(0, 2)$.



51

X' en Y' zijn de beelden van X en Y . Teken de projectierichting b en de projectieas a in de volgende gevallen.



52

Stel de tekentabel op van de volgende functies door gebruik te maken van het functievoorschrift.

a) $f(x) = -2x + 3$

b) $g(x) = \frac{x}{3} - 2$

c) $h(x) = -0,5x - 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -2x + 3 &= 0 \\ -2x &= -3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

x		$\frac{3}{2}$	
f(x)	+	0	-

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ \frac{x}{3} - 2 &= 0 \\ \frac{x}{3} &= 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

x		6	
f(x)	-	0	+

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ -0,5x - 1 &= 0 \\ -0,5x &= 1 \\ x &= \frac{1}{-\frac{1}{2}} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

x		-2	
f(x)	+	0	-



53

Gegeven: $R(0, 3)$
 $S(-1, 0)$
 $T(5, 5)$
 $M(4, 0)$
 M is het midden van [RU], [SV] en [TW]

Bepaal de coördinaten van U, V en W.

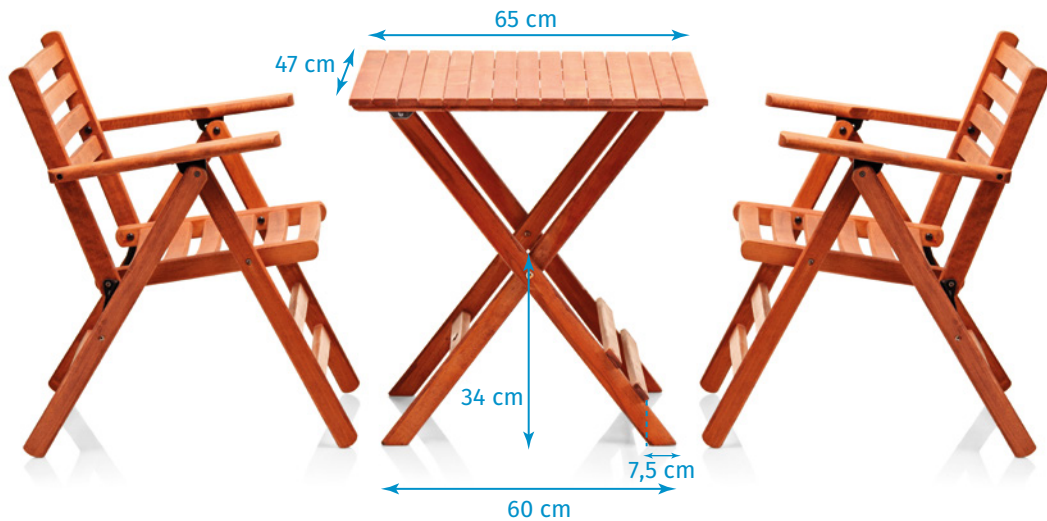
$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{0 + x_U}{2} &= 4 \quad \text{en} \quad \frac{3 + y_U}{2} = 0 \\ x_U &= 8 \quad y_U = -3 \\ U(8, -3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{-1 + x_V}{2} &= 4 \quad \text{en} \quad \frac{0 + y_V}{2} = 0 \\ x_V &= 9 \quad y_V = 0 \\ V(9, 0) \end{aligned}$$

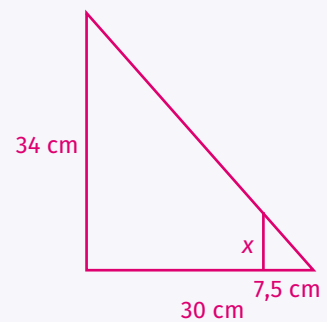
$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{5 + x_W}{2} &= 4 \quad \text{en} \quad \frac{5 + y_W}{2} = 0 \\ x_W &= 3 \quad y_W = -5 \\ W(3, -5) \end{aligned}$$



Lou en Fien willen op hun terras enkele tuinmeubelen zetten. Op de website van een meubelwinkel vonden ze een tafeltje en stoelen met onderstaande afmetingen. Er loopt echter een afvoerbuis over hun terras die 9 cm boven de grond uitsteekt. Staat de dwarse plank aan de voet van het tafeltje hoog genoeg zodat de buis onder de meubels door kan lopen? Toon dit aan met een berekening.



$$\begin{aligned}\frac{34}{30} &= \frac{x}{7,5} \\ x &= \frac{7,5 \cdot 34}{30} \\ x &= \frac{255}{30} \\ x &= 8,5\end{aligned}$$

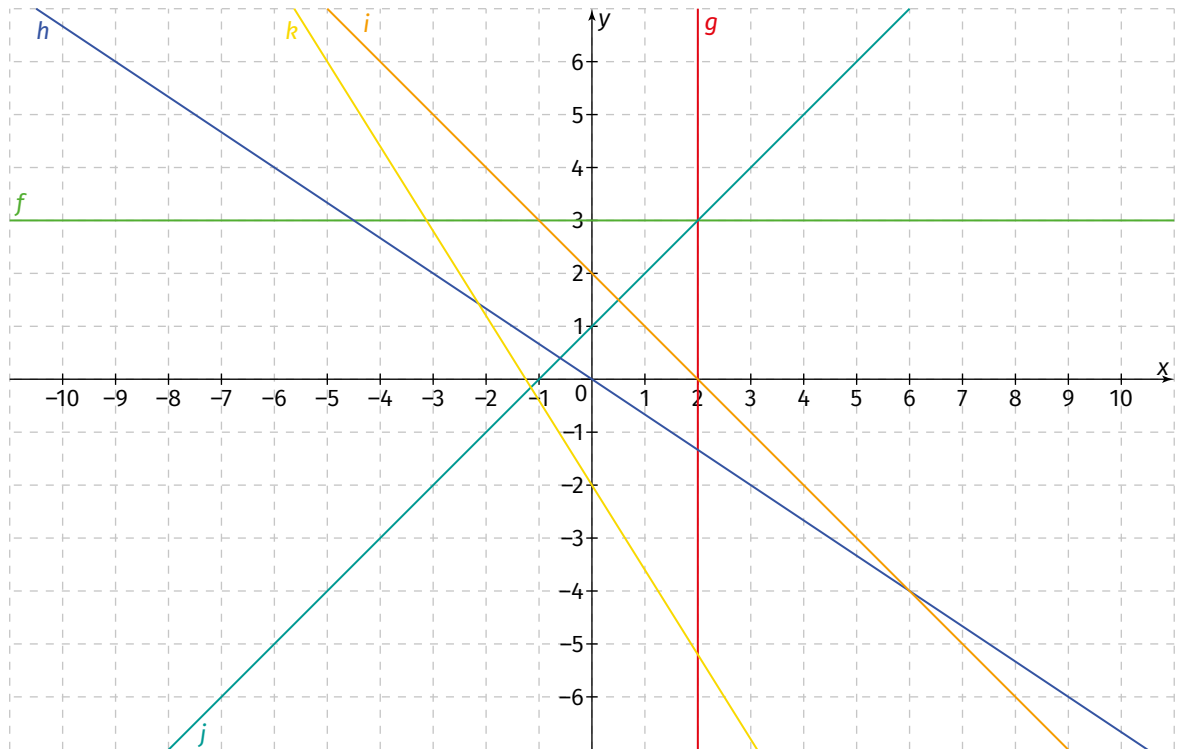


Antwoord: De dwarse balk is niet hoog genoeg om de afvoerbuis onder de meubels te laten lopen.



55

Geef van elke rechte de juiste vergelijking.



$$f \leftrightarrow y = 3$$

$$g \leftrightarrow x = 2$$

$$h \leftrightarrow y = \frac{-2x}{3}$$

$$i \leftrightarrow y = -x + 2$$

$$j \leftrightarrow y = x + 1$$

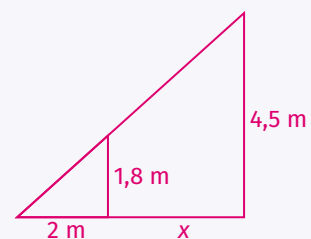
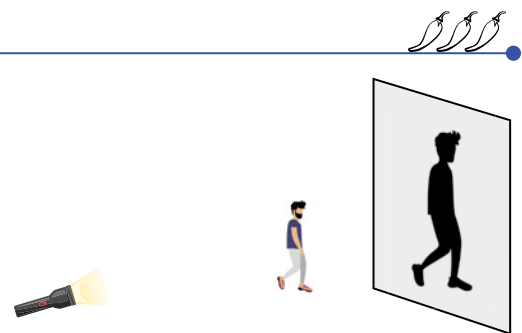
$$k \leftrightarrow y = -\frac{8x}{5} - 2$$

56

Tom wandelt voorbij een zaklamp op 2 m van hem, waardoor op de muur een schaduw gevormd wordt van 4,5 m hoog. Bereken de afstand tussen Tom en de muur als je weet dat Tom 1,80 m groot is.

$$\begin{aligned} \frac{1,8}{2} &= \frac{4,5}{2+x} \\ 1,8 \cdot (2+x) &= 2 \cdot 4,5 \\ 3,6 + 1,8x &= 9 \\ 1,8x &= 9 - 3,6 \\ 1,8x &= 5,4 \\ x &= \frac{5,4}{1,8} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Antwoord: Tom bevindt zich op 3 meter van de muur.



57

In de volgende tabel zijn de lengtes van de zijden van driehoek ABC gegeven. Onderzoek welk van deze driehoeken rechthoekig is en welke hoek recht is.

	a	b	c
1)	18	12	14
2)	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{5}$	$3\sqrt{4}$
3)	$15\sqrt{2}$	15	15
4)	5	6	8

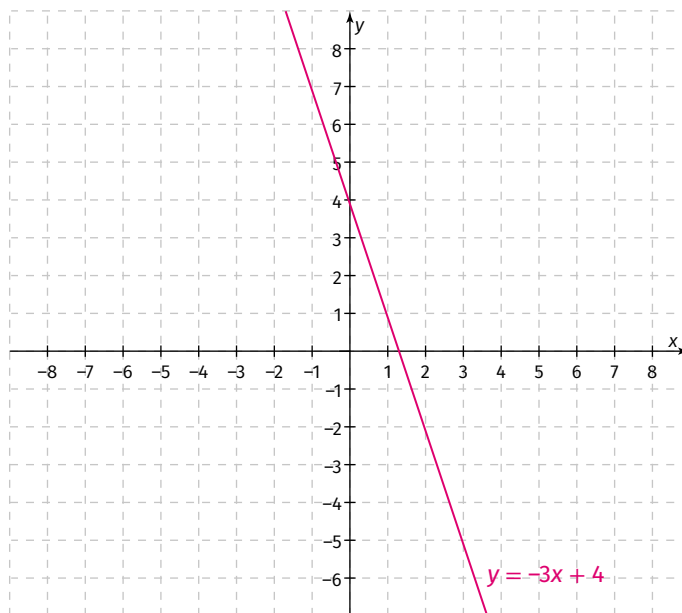
- 1) $18^2 \neq 12^2 + 14^2$
→ ABC is niet rechthoekig.
- 2) $(3\sqrt{5})^2 \neq (3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{4})^2$
→ ABC is niet rechthoekig.
- 3) $(15\sqrt{2})^2 = 15^2 + 15^2$
 $450 = 450$
→ ABC is rechthoekig met $\hat{A}$ als rechte hoek.
- 4) $8^2 \neq 5^2 + 6^2$
→ ABC is niet rechthoekig.



58

De rechte a heeft als functievoorschrift $f(x) = -3x + 4$.

- a) Ligt het punt A(0, -4) op de rechte a? Nee.
- b) Ligt het punt B(2, -2) op de rechte a? Ja.
- c) Bepaal het snijpunt van de grafiek met de x-as en de y-as.
- d) Teken de grafiek van de rechte a.



- Snijpunt met de x-as:

Als $y = 0$, dan:

$$\begin{aligned} -3x + 4 &= 0 \\ 4 &= 3x \\ \frac{4}{3} &= x \\ &\rightarrow \left(\frac{4}{3}, 0\right) \end{aligned}$$

- Snijpunt met de y-as:

Als $x = 0$, dan:

$$\begin{aligned} y &= -3 \cdot 0 + 4 \\ y &= 4 \\ &\rightarrow (0, 4) \end{aligned}$$



59

Verbind de decimale vorm met de passende breuk.

4,1515...	-5,23999...	1,14898989...	-0,777...	-6,9444...
$-\frac{7}{9}$	$\frac{455}{396}$	$\frac{137}{33}$	$-\frac{125}{18}$	$-\frac{131}{25}$



60

Bereken de ontbrekende lengte in de volgende rechthoekige driehoeken met $\hat{A} = 90^\circ$.

AB	BC	AC
1,5 cm	$\frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ cm} \approx 3,35 \text{ cm}$	3 cm
6 cm	6,5 cm	2,5 cm
2,5 cm	6 cm	$\frac{\sqrt{119}}{2} \text{ cm} \approx 5,45 \text{ cm}$

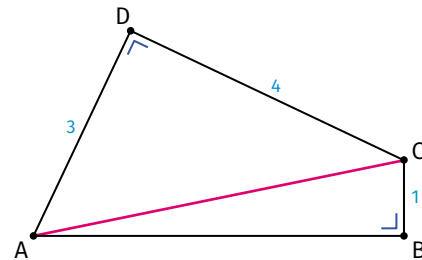


61

ABCD is een vierhoek met rechte hoeken in B en D. Bepaal de oppervlakte van deze vierhoek.

- a) 8
b) $6 + \sqrt{6}$
c) 8,5
d) 17
e) $12 + 2\sqrt{6}$

© VWO 2000-2001 eerste ronde



$$\begin{aligned} |AC|^2 &= 4^2 + 3^2 \\ |AC| &= \sqrt{16 + 9} \\ |AC| &= \sqrt{25} \\ |AC| &= 5 \end{aligned}$$

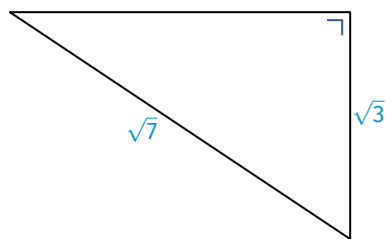
$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |CB|^2 + |AB|^2 \\ 5^2 &= 1^2 + |AB|^2 \\ \sqrt{25 - 1} &= |AB| \\ \sqrt{24} &= |AB| \\ 2\sqrt{6} &= |AB| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= A_{\triangle ADC} + A_{\triangle ACB} \\ &= \frac{4^2 \cdot 3}{2} + \frac{2^1 \sqrt{6} \cdot 1}{2} \\ &= 6 + \sqrt{6} \end{aligned}$$



62

Bereken de ontbrekende lengte in onderstaande rechthoekige driehoek.



$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= c^2 \\
 a^2 + (\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{7})^2 \\
 a^2 + 3 &= 7 \\
 a^2 &= 7 - 3 \\
 a^2 &= 4 \\
 a &= \sqrt{4} \\
 a &= 2
 \end{aligned}$$



63

Bepaal a en b voor de onderstaande functies.

a) $f(x) = 5 \cdot (5x + 3)$

$$\begin{aligned}
 y &= 5 \cdot (5x + 3) \\
 y &= 25x + 15 \\
 \rightarrow a &= 25 \\
 b &= 15
 \end{aligned}$$

b) $g(x) = -(2x + 3) + (9x + 11)$

$$\begin{aligned}
 y &= -(2x + 3) + (9x + 11) \\
 y &= -2x - 3 + 9x + 11 \\
 y &= 7x + 8 \\
 \rightarrow a &= 7 \\
 b &= 8
 \end{aligned}$$

c) $h(x) = 78x - 1 \cdot 43$

$$\begin{aligned}
 y &= 78x - 1 \cdot 43 \\
 y &= 78x - 43 \\
 \rightarrow a &= 78 \\
 b &= -43
 \end{aligned}$$



64

Reken uit door de rekenregels van machten toe te passen.

a) $\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^3$

$= \frac{a^6}{b^6}$

c) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{b^3}{a^2}\right)^4 = \frac{a^4}{b^8} \cdot \frac{b^{12}}{a^8}$
 $= a^{-4} \cdot b^4$
 $= \frac{b^4}{a^4}$

b) $\left(\frac{a}{a^{-3}}\right)^2$

$= (a^4)^2$
 $= a^8$

d) $(a^2)^4 \cdot (a^2)^3 = a^8 \cdot a^6$
 $= a^{14}$



65

Voor een treinticket betaal je 0,15 euro per kilometer en een vaste kost van 2 euro per ticket.

- a) Druk het verband tussen de afgelegde weg s en de prijs p uit met een functievoorschrift.

$p(s) = 0,15s + 2$



- b) Vul de tabel aan.

s (in km) afgelegde weg	0	20	40	60	80	100	120
p (in euro) prijs	2	5	8	11	14	17	20

- c) Je wil van Gent naar De Panne reizen. De afstand van dit traject is 70 km. Hoeveel betaal je voor dit traject?

$$p(70) = 0,15 \cdot 70 + 2$$

$$= 12,5$$

Antwoord: Je betaalt € 12,50 voor dit traject.

- d) Hoe ver kan je reizen met een bedrag van € 18,00?

$$0,15s + 2 = 18$$

$$0,15s = 18 - 2$$

$$0,15s = 16$$

$$s = \frac{16}{0,15}$$

$$s = 106,666...$$

Antwoord: Je kan net geen 107 km reizen met € 18,00.



66

Bereken.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } (-3\sqrt{5} - 2\sqrt{3})^2 &= (-3\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (-3\sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{3} \\
 &= 9 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 12\sqrt{5}\sqrt{3} \\
 &= 45 + 12 + 12\sqrt{15} \\
 &= 57 + 12\sqrt{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (2\sqrt{3} - \sqrt{10})^2 - (2\sqrt{20} + 3)^2 &= ((2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{10}) - ((2\sqrt{20})^2 + 3^2 + 2 \cdot 2\sqrt{20} \cdot 3) \\
 &= (4 \cdot 3 + 10 - 4\sqrt{30}) - (4 \cdot 20 + 9 + 12\sqrt{20}) \\
 &= 12 + 10 - 4\sqrt{30} - 80 - 9 - 24\sqrt{5} \\
 &= -67 - 4\sqrt{30} - 24\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } (2 - 3\sqrt{4})(-3\sqrt{4} + 2) &= (2 - 3\sqrt{4})^2 \\
 &= 2^2 + (3\sqrt{4})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{4} \\
 &= 4 + 9 \cdot 4 - 12 \cdot 2 \\
 &= 4 + 36 - 24 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } (\sqrt{6} + 2\sqrt{5}a) \cdot (\sqrt{6} - 2\sqrt{5}a) &= (\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{5}a)^2 \\
 &= 6 - 4 \cdot 5 \cdot a^2 \\
 &= 6 - 20a^2
 \end{aligned}$$



67

Noteer als een interval.

a) Alle reële getallen die kleiner dan of gelijk zijn aan -2 en groter zijn dan -7.

 $]-7, -2]$

b) Alle reële getallen die groter dan of gelijk aan 5 zijn.

 $[5, +\infty[$

c) Alle reële getallen tussen -3,67 en 5,18.

 $] -3,67; 5,18[$

$$\text{d) } -4x < 2 \quad \left] -\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$\text{e) } -13x > 3 \quad \left] -\infty, -\frac{3}{13}[$$

$$\text{f) } x < 13 \quad \left] -\infty, 13[$$



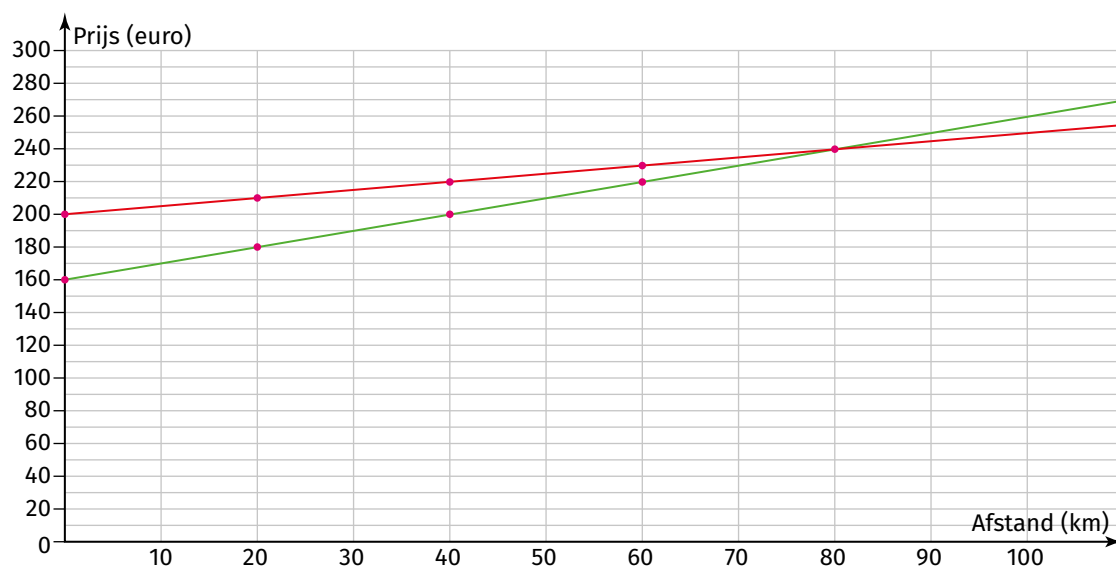
Fien wil een feesttent huren voor haar 15de verjaardag. Hiervoor vergelijkt ze de bedrijven Feestmateriaal en Rent-a-tent. Het bedrijf Feestmateriaal vraagt een huur van € 200 en een vervoerskost van € 0,50 per kilometer. Het bedrijf Rent-a-tent vraagt een huur van € 160 en een vervoerskost van € 1 per kilometer.



a) Vul onderstaande tabel aan.

Aantal kilometer	0	10	20	30	40	50	60
Prijs in € bij Feestmateriaal	200	205	210	215	220	225	230
Prijs in € bij Rent-a-tent	160	170	180	190	200	210	220

b) Teken de grafiek die hoort bij de firma Feestmateriaal in het rood en de grafiek die hoort bij de firma Rent-a-tent in het groen.



c) Noteer een formule om de prijs (p) in functie van de afstand (x) weer te geven voor de firma Feestmateriaal.

$$p = 0,5 \cdot x + 200$$

d) Hoeveel betaal je bij de firma Feestmateriaal als het bedrijf op 80 kilometer van jouw locatie ligt?

$$0,5 \cdot 80 + 200 = 240 \rightarrow \text{Je betaalt € 240.}$$

e) Noteer een formule om de prijs (p) in functie van de afstand (x) weer te geven voor de firma Rent-a-tent.

$$p = 1 \cdot x + 160 = x + 160$$

f) Hoeveel betaal je bij de firma Rent-a-tent als het bedrijf op 65 kilometer van je locatie ligt?

$$65 + 160 = 225 \rightarrow \text{Je betaalt € 225.}$$

g) Welk bedrijf is voor jou het voordeligst?

Het bedrijf Rent-a-tent is in dit geval het voordeligst.



69

Los op in $\mathbb{R}$.

a) $3(2x - 10) - 7(x - 4) = 4 - 5x$

$$6x - 30 - 7x + 28 = 4 - 5x$$

$$6x - 7x + 5x = 4 + 30 - 28$$

$$4x = 6$$

$$x = \frac{6}{4}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

b) $\frac{1}{3} - \frac{5x - 4}{27} = \frac{4 - x}{18}$

$$\frac{18}{54} - \frac{10x - 8}{54} = \frac{12 - 3x}{54}$$

$$18 - 10x + 8 = 12 - 3x$$

$$-10x + 3x = 12 - 18 - 8$$

$$-7x = -14$$

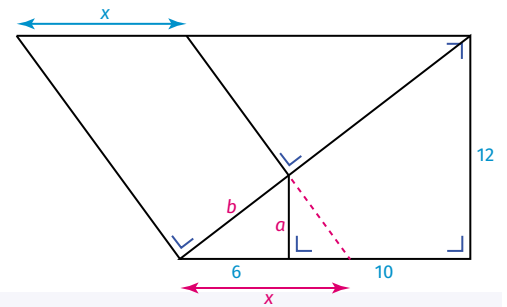
$$x = \frac{-14}{-7}$$

$$x = 2$$

70

Bepaal de afstand x in de nevenstaande figuur.
Pas hierbij de stelling van Pythagoras, de stelling van Thales en de metrische betrekkingen toe.

© VWO 2010-2011 tweede ronde



- $\frac{6}{16} = \frac{a}{12}$ (Stelling van Thales)

$$16a = 6 \cdot 12$$

$$16a = 72$$

$$a = 4,5$$

- $6^2 + a^2 = b^2$ (Stelling van Pythagoras)

$$6^2 + 4,5^2 = b^2$$

$$36 + 20,25 = b^2$$

$$56,25 = b^2$$

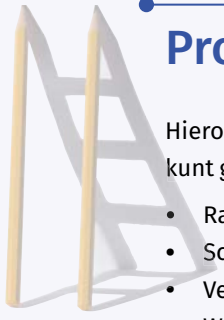
$$7,5 = b$$

- $b^2 = 6 \cdot x$ (Metrische betrekkingen)

$$7,5^2 = 6 \cdot x$$

$$\frac{56,25}{6} = x$$

$$9,375 = x$$



Problemen oplossen met heuristieken

Hieronder vind je twee problemen. Je moet zelf een oplossingsstrategie kiezen en nagaan welke wiskundekennis je kunt gebruiken om het probleem op te lossen.

- Raadpleeg je vademecum om een gepaste heuristiek te kiezen en denk soms out of the box.
- Schrijf jouw oplossing netjes uit zodat je die kunt presenteren voor andere leerlingen.
- Vergelijk jouw oplossing met die van een andere leerling.
- Werk samen en kom tot nieuwe inzichten bij het oplossen van problemen.

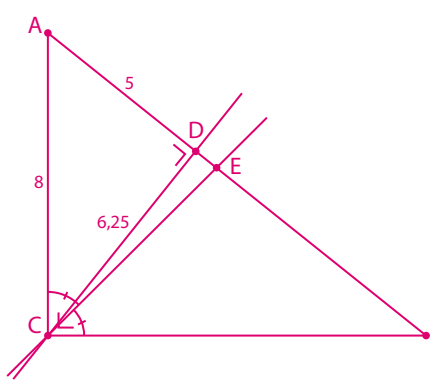
Probleem 3

Gegeven: $\triangle ABC$ is rechthoekig in C met hoogtelijn CD uit C op AB en deellijn CE van $\hat{C}$.

$$|AC| = 8, |AD| = 5 \text{ en } |CD| = 6,25.$$

Gevraagd: Bereken $|BC|$ en $|DE|$ op 0,01 nauwkeurig.

Gekozen heuristiek: **Het maken van een figuur, het gegeven en gevraagde aanduiden op een figuur**



$$|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$$

$$6,25^2 = 5 \cdot |DB|$$

$$7,81 \approx |DB|$$

$$|BC|^2 = |DB| \cdot |AB|$$

$$|BC|^2 = |DB| \cdot (|AD| + |DB|)$$

$$|BC|^2 = |DB| \cdot (5 + |DB|)$$

$$|BC| \approx 10,00$$

$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

$$\frac{|DB| - |DE|}{|AD| + |DE|} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

$$|DB| \cdot |AC| - |DE| \cdot |AC| = |BC| \cdot |AD| + |BC| \cdot |DE|$$

$$|DB| \cdot |AC| - |BC| \cdot |AD| = |BC| \cdot |DE| + |DE| \cdot |AC|$$

$$|DE| = \frac{|DB| \cdot |AC| - |BC| \cdot |AD|}{|BC| + |AC|}$$

$$|DE| \approx 0,69$$

Probleem 4

Twee auto's rijden naar elkaar toe op een lange rechte weg. De blauwe auto rijdt met een snelheid van 90 km/u en de rode auto met een snelheid van 70 km/u. Hoe groot is de afstand tussen beide auto's 15 minuten voor ze elkaar tegenkomen?

Gekozen heuristiek: **Het probleem vervangen door een eenvoudiger probleem**

We kunnen het probleem als volgt voorstellen met vectoren:



Het probleem kan vereenvoudigd voorgesteld worden, door te stellen dat de blauwe auto aan 90 km/u + 70 km/u = 160 km/u rijdt naar de stilstaande rode auto.



Afgelegde weg door de blauwe auto na 15 minuten: $160 \frac{\text{km}}{\text{u}} \cdot \frac{1}{4} \text{ u} = 40 \text{ km}.$

Antwoord: De afstand tussen beide auto's is 40 km.

Oefeningenreeks 4 pepers

71

De punten A(1, 2) en B(9, 17) liggen allebei op een cirkel. [AB] is de diameter van de cirkel.

- Bepaal de coördinaat van het middelpunt M van deze cirkel.
- Bepaal de lengte van de straal van deze cirkel.

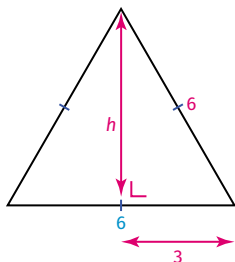
$$\begin{aligned} \text{a) } M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) &= M\left(\frac{1 + 9}{2}, \frac{2 + 17}{2}\right) \\ &= M\left(\frac{10}{2}, \frac{19}{2}\right) \\ &= M(5; 9,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } r &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(5 - 1)^2 + (9,5 - 2)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 7,5^2} \\ &= \sqrt{16 + 56,25} \\ &= \sqrt{72,25} \\ &= 8,5 \end{aligned}$$



72

Bereken de lengte van de hoogte in onderstaande driehoek.



$$\begin{aligned} 6^2 &= h^2 + 3^2 \\ h^2 &= 6^2 - 3^2 \\ h &= \sqrt{6^2 - 3^2} \\ h &= \sqrt{36 - 9} \\ h &= \sqrt{27} \\ h &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$



73

Kleur de evenwijdige rechten in eenzelfde kleur.

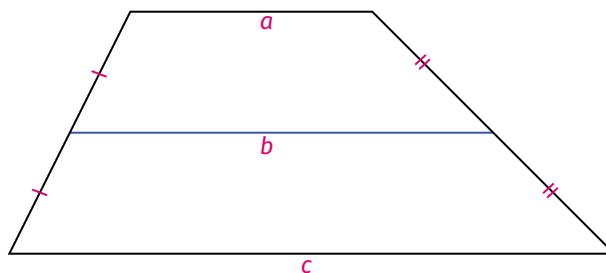
$a \leftrightarrow y = 2x + 3$	$c \leftrightarrow y = 2x$	$e \leftrightarrow y = -2(5 - 2x)$
$b \leftrightarrow y = 7 - 2x$	$d \leftrightarrow y = -2x - 3$	$f \leftrightarrow y = 6 + 4x$



74

Een trapezium wordt door zijn middenparallel verdeeld in twee delen. De oppervlakten van deze twee delen verhouden zich zoals 5 tot 2. De verhouding van de grote basis tot de kleine basis is dan ...

- a) $\frac{5}{2}$
 b) $\frac{25}{4}$
 c) 7
 d) 11
 e) 13



© VWO 1990-1991 eerste ronde

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{(c+a)2h}{2} &= 7 \\ c+a &= \frac{7}{h} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (2) \text{ in } (1): \\ a + \frac{6}{h} + a &= \frac{7}{h} \\ 2a &= \frac{1}{h} \\ h &= \frac{1}{2a} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{(c+b)h}{2} &= 5 \\ c+b &= \frac{10}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (3) \text{ in } (1): \\ c+a &= \frac{7}{\frac{1}{2a}} \\ c+a &= 14a \\ c &= 13a \\ \frac{c}{a} &= 13 \end{aligned}$$

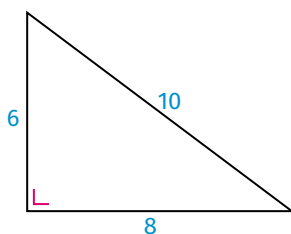
$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{(a+b)h}{2} &= 2 \\ a+b &= \frac{4}{h} \\ a + \frac{10}{h} - c &= \frac{4}{h} \\ \frac{6}{h} &= c - a \\ c &= \frac{6}{h} + a \quad (2) \end{aligned}$$



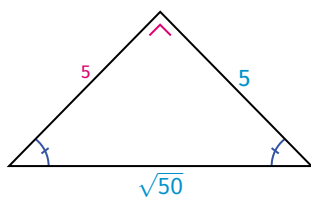
75

Welke driehoeken zijn rechthoekig? Duid de rechte hoek aan van de rechthoekige driehoek(en).

a)



b)



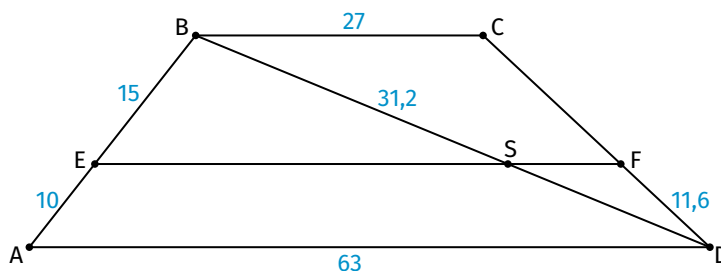
$$\begin{aligned} \text{a) } 10^2 &= 100 \\ 6^2 + 8^2 &= 36 + 64 \\ &= 100 \\ \rightarrow \text{ Deze driehoek is rechthoekig.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\sqrt{50})^2 &= 50 \\ 5^2 + 5^2 &= 25 + 25 \\ &= 50 \\ \rightarrow \text{ Deze driehoek is rechthoekig.} \end{aligned}$$



In het trapezium ABCD worden de opstaande zijden door de rechte EF gesneden ($EF \parallel AD$). Verder snijden BD en EF elkaar in het punt S. Bepaal de gevraagde lengtes.

- a) $|DS|$
- b) $|CF|$
- c) $|CD|$
- d) $|EF|$
- e) $|FS|$
- f) $|ES|$



$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{|DS|}{|AE|} &= \frac{|BS|}{|BE|} \\ \frac{|DS|}{10} &= \frac{31,2}{15} \\ |DS| &= \frac{31,2 \cdot 10}{15} \\ |DS| &= 20,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{|CF|}{|BS|} &= \frac{|DF|}{|DS|} \\ \frac{|CF|}{31,2} &= \frac{11,6}{20,8} \\ |CF| &= \frac{11,6 \cdot 31,2}{20,8} \\ |CF| &= 17,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } |CD| &= |CF| + |DF| \\ &= 17,4 + 11,6 \\ &= 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } |EF| &= |ES| + |SF| \\ &= 37,8 + 10,8 \\ &= 48,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{|SF|}{|FD|} &= \frac{|BC|}{|CD|} \\ \frac{|SF|}{11,6} &= \frac{27}{29} \\ |SF| &= \frac{27 \cdot 11,6}{29} \\ |SF| &= 10,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{|ES|}{|BE|} &= \frac{|AD|}{|AB|} \\ \frac{|ES|}{15} &= \frac{63}{25} \\ |ES| &= \frac{63 \cdot 15}{25} \\ |ES| &= 37,8 \end{aligned}$$



77

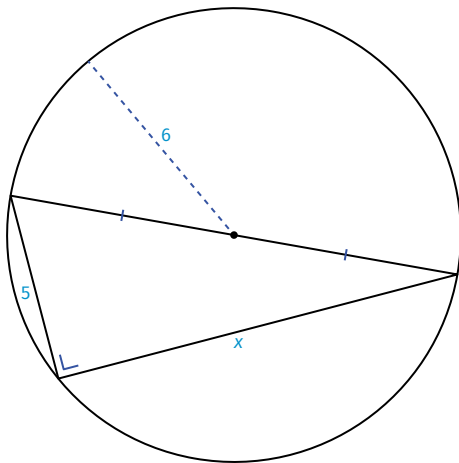
Toon aan dat $x = -\frac{1}{2}$ en $x = \frac{3}{4}$ nulwaarden zijn van de functie f met voorschrift $f(x) = 24x^3 - 6x^2 - 9x$.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) &= 24 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= -3 - \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \\
 &= 0 \\
 \bullet \quad 24 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 9 \cdot \frac{3}{4} &= 24 \cdot \frac{27}{64} - 6 \cdot \frac{9}{16} - 9 \cdot \frac{3}{4} \\
 &= \frac{81}{8} - \frac{27}{8} - \frac{27}{4} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$



78

Bereken x .

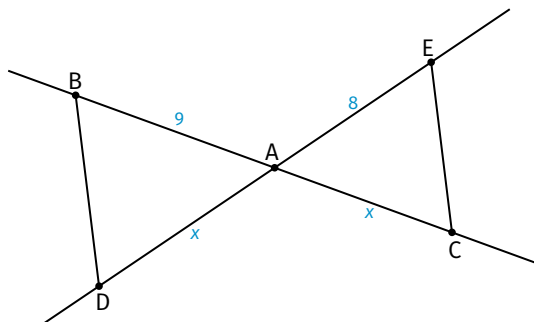


$$\begin{aligned}
 x^2 + 5^2 &= (2 \cdot 6)^2 \\
 x^2 &= 12^2 - 5^2 \\
 x &= \sqrt{144 - 25} \\
 x &= \sqrt{119}
 \end{aligned}$$



79

Toon aan met behulp van de stelling van Thales dat $x = 6\sqrt{2}$ als $BD \parallel EC$.

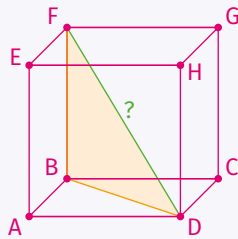


Als $BD \parallel EC$ geldt de stelling van Thales

$$\begin{aligned}
 \frac{|AB|}{|AD|} &= \frac{|AC|}{|AE|} \\
 \frac{9}{x} &= \frac{x}{8} \\
 x^2 &= 9 \cdot 8 \\
 x^2 &= 72 \\
 x &= \sqrt{72} \\
 x &= \sqrt{36 \cdot 2} \\
 x &= 6\sqrt{2}
 \end{aligned}$$



Elodie wil verschillende kleine kerstcadeautjes inpakken in een kubusvormige doos. Het grootste cadeau is een stylus van 12,3 cm lang. Kan deze in de doos als je weet dat het volume van de kubus gelijk is aan 1176 cm^3 ?



$$\begin{aligned} V &= 1176 \\ z^3 &= 1176 \\ z &= \sqrt[3]{1176} (\approx 10,56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bullet |BD| \text{ in } \triangle ABD \text{ met } \hat{A} = 90^\circ: \\ |BD|^2 &= |AD|^2 + |AB|^2 \\ |BD|^2 &= z^2 + z^2 \\ |BD| &\approx 14,93 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bullet |FD| \text{ in } \triangle BDF \text{ met } \hat{B} = 90^\circ: \\ |FD|^2 &= |BD|^2 + |BF|^2 \\ |FD|^2 &= z^2 + z^2 + z^2 \\ |FD| &\approx 18,28 \end{aligned}$$

Antwoord: De stylus past in de doos.



Maak de noemer wortelvrij.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\sqrt{24} + 8}{\sqrt{5} + 3} &= \frac{(2\sqrt{6} + 8)(\sqrt{5} - 3)}{(\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} - 3)} \\ &= \frac{2\sqrt{30} - 6\sqrt{6} + 8\sqrt{5} - 24}{5 - 9} \\ &= \frac{\cancel{-12\sqrt{30}} - \cancel{6^+3}\sqrt{6} + \cancel{8^-4}\sqrt{5} - \cancel{24^+12}}{\cancel{-4}_2} \\ &= \frac{-\sqrt{30} + 3\sqrt{6} - 4\sqrt{5} + 12}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\sqrt{18} + \sqrt{3}}{\sqrt{10} - \sqrt{5}} &= \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{10} + \sqrt{5})}{(\sqrt{10} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{5})} \\ &= \frac{3\sqrt{20} + 3\sqrt{10} + \sqrt{30} + \sqrt{15}}{10 - 5} \\ &= \frac{6\sqrt{5} + 3\sqrt{10} + \sqrt{30} + \sqrt{15}}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{\sqrt{8} - 5}{5 - \sqrt{125}} &= \frac{(\sqrt{8} - 5)(5 + 5\sqrt{5})}{(5 - 5\sqrt{5})(5 + 5\sqrt{5})} \\ &= \frac{5\sqrt{8} + 5\sqrt{40} - 25 - 25\sqrt{5}}{25 - 25 \cdot 5} \\ &= \frac{\cancel{-2}^{+2}\sqrt{2} + \cancel{10^-2}\sqrt{10} - \cancel{25^+5} - \cancel{25^+5}\sqrt{5}}{\cancel{-100}_{20}} \\ &= \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{10} + 5 + 5\sqrt{5}}{20} \end{aligned}$$



Bereken.

$$\begin{aligned} \text{a) } (-3a - 5b^2)^2 &= (-3a)^2 - 2 \cdot (-3a) \cdot 5b^2 + 25b^4 \\ &= 9a^2 + 30ab^2 + 25b^4 \end{aligned}$$

$$\text{b) } (5p^2 + 11q^3) \cdot (5p^2 - 11q^3) = 25p^4 - 121q^6$$

$$\text{c) } (0,3x^2 + 0,1y^2z^3) \cdot (0,3x^2 - 0,1y^2z^3) = 0,09x^4 - 0,01y^4z^6$$

$$\text{d) } (1,5a^3 - 1,3b^2)^2 = 2,25a^6 - 3,9a^3b^2 + 1,69b^4$$

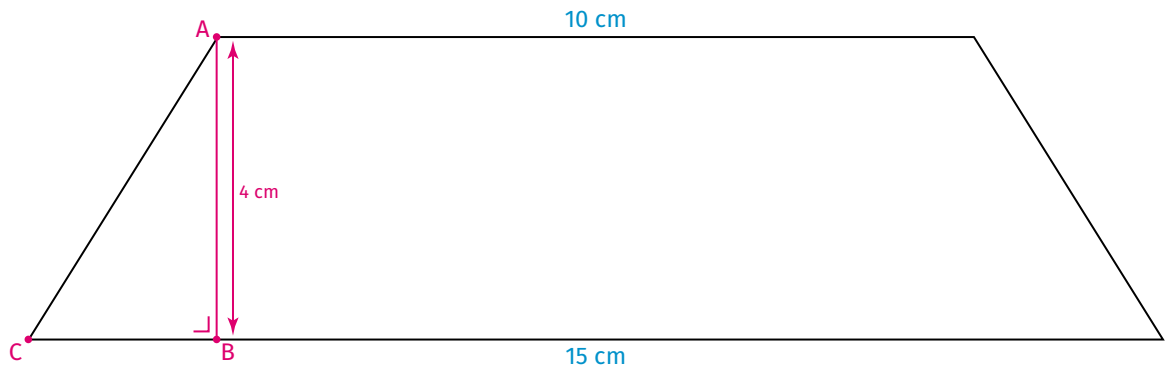
$$\begin{aligned} \text{e) } (5x - 4y)^3 &= 125x^3 - 3 \cdot (5x)^2 \cdot 4y + 3 \cdot 5x \cdot (4y)^2 - 64y^3 \\ &= 125x^3 - 300x^2y + 240xy^2 - 64y^3 \end{aligned}$$

$$\text{f) } (a^3 + 2ab^3)^3 = a^9 + 6a^7b^3 + 12a^5b^6 + 8a^3b^9$$



83

Bereken de lengte van de opstaande zijden als je weet dat de hoogte van het gelijkbenig trapezium 4 cm is.



$$\begin{aligned}
 |AC|^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 \\
 |AC| &= \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} \\
 &= \sqrt{4^2 + \left(\frac{15-10}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{4^2 + 2,5^2} \\
 &= \sqrt{16 + 6,25} \\
 &= \sqrt{22,25} \\
 &\approx 4,72
 \end{aligned}$$

Antwoord: De opstaande zijden zijn ongeveer 4,72 cm lang.



84

Bepaal de afstand tussen de punten A en B. Schrijf je uitkomst als een zo eenvoudig mogelijke wortelvorm.

a) A(15, 18) en B(-3, 8)

$$\begin{aligned}
 |AB| &= \sqrt{(15 - (-3))^2 + (18 - 8)^2} \\
 &= \sqrt{18^2 + 10^2} \\
 &= \sqrt{324 + 100} \\
 &= \sqrt{424} \\
 &= 2\sqrt{106}
 \end{aligned}$$

b) A(4, -3) en B(3, -15)

$$\begin{aligned}
 |AB| &= \sqrt{(4 - 3)^2 + ((-3) - (-15))^2} \\
 &= \sqrt{1^2 + 12^2} \\
 &= \sqrt{1 + 144} \\
 &= \sqrt{145}
 \end{aligned}$$

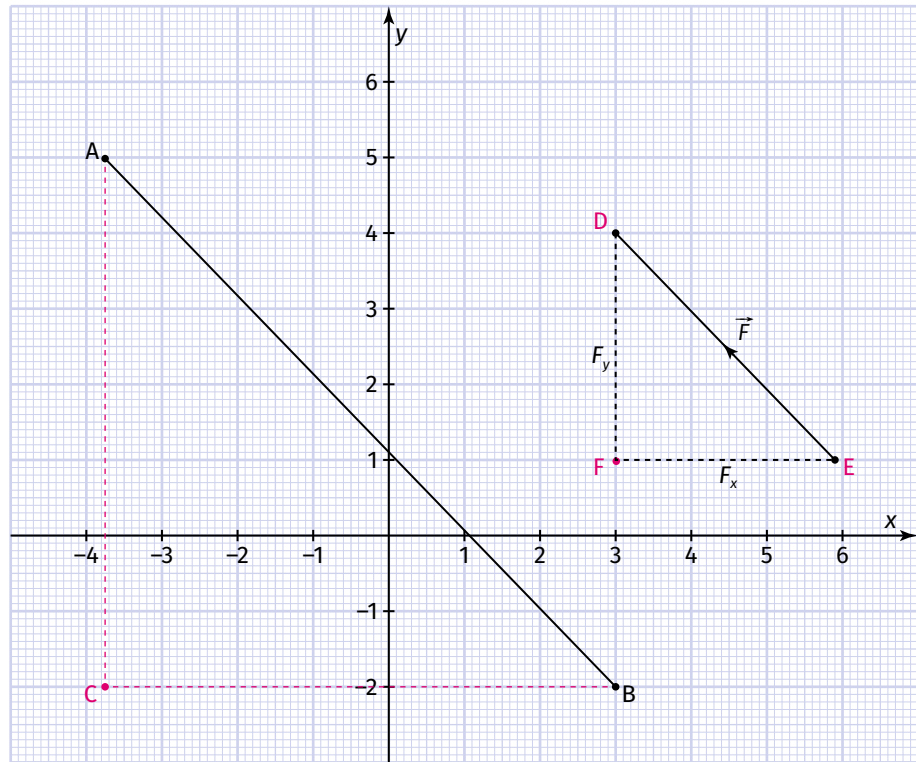
c) A(23, 29) en B(20, 27)

$$\begin{aligned}
 |AB| &= \sqrt{(23 - 20)^2 + (29 - 27)^2} \\
 &= \sqrt{3^2 + 2^2} \\
 &= \sqrt{9 + 4} \\
 &= \sqrt{13}
 \end{aligned}$$



85

Een kracht $\vec{F}$ heeft een grootte van 275 N. De drager van $\vec{F}$ is evenwijdig met de rechte AB. De coördinaat van A is $(-\frac{15}{4}, 5)$ en de coördinaat van B is $(3, -2)$. Bepaal de horizontale component F_x en de verticale component F_y van de vector $\vec{F}$.



- In $\triangle ABC$:

$$|AB| = \sqrt{7^2 + \left(\frac{27}{4}\right)^2} \approx 9,72$$

- $AB \parallel DE$

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|DF|}{|AC|}$$

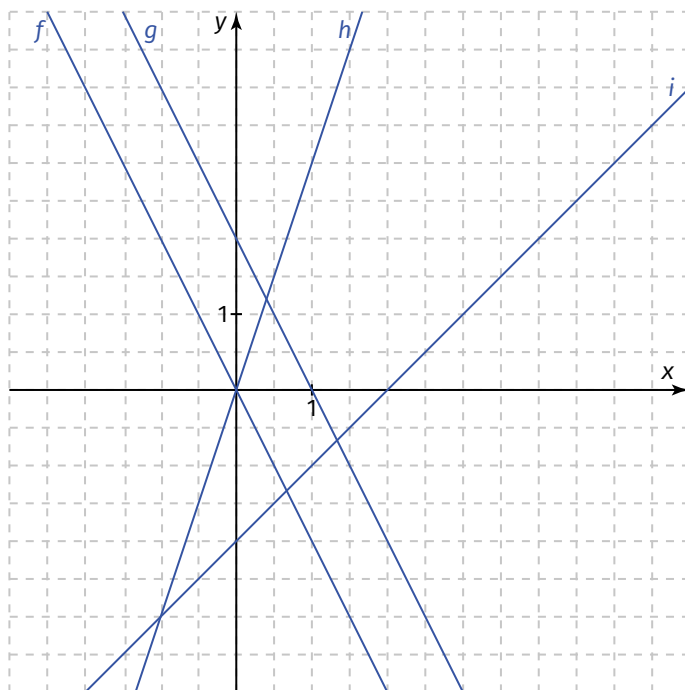
$$\frac{275}{9,72} = \frac{F_x}{\frac{27}{4}} = \frac{F_y}{7}$$

$$F_x = \frac{275 \cdot \frac{27}{4}}{9,72} \approx 191,0$$

$$F_y = \frac{275 \cdot 7}{9,72} \approx 198,0$$

Antwoord: De horizontale component is ongeveer 191 N en de verticale component ongeveer 198 N.





a) Bepaal de richtingscoëfficiënt van f .

$$a = -2$$

b) Bepaal de richtingscoëfficiënt van h .

$$a = 3$$

c) Geef het functievoorschrift van g .

$$g(x) = -2x + 2$$

d) Bepaal het nulpunt van de rechte i .

$$(2, 0)$$

e) Bepaal de coördinaat van het snijpunt van $g(x)$ en $h(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= h(x) \\ -2x + 2 &= 3x \\ 2 &= 5x \\ \frac{2}{5} &= x \\ h\left(\frac{2}{5}\right) &= 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Antwoord: De coördinaat van het snijpunt van $g(x)$ en $h(x)$ is $\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

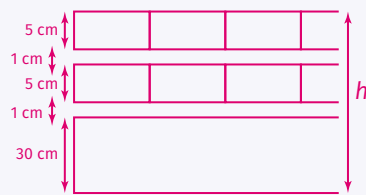


87

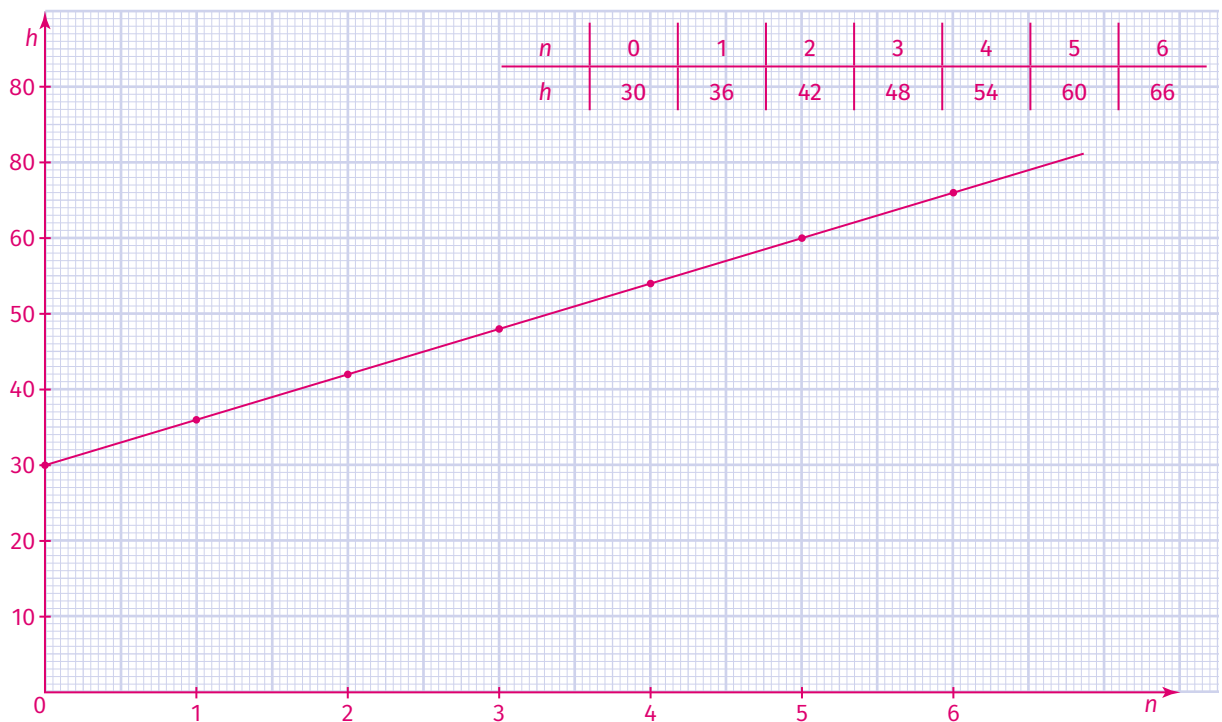
Op een fundering in beton die 30 cm boven de grond uitsteekt, bouwt men een muur met bakstenen met een hoogte van 5 cm en een voegbreedte van 1 cm.

- a) Noteer een functievoorschrift die het verband beschrijft tussen de totale hoogte h en het aantal lagen bakstenen n .

$$h(n) = 6n + 30$$



- b) Teken de bijpassende grafiek.



88

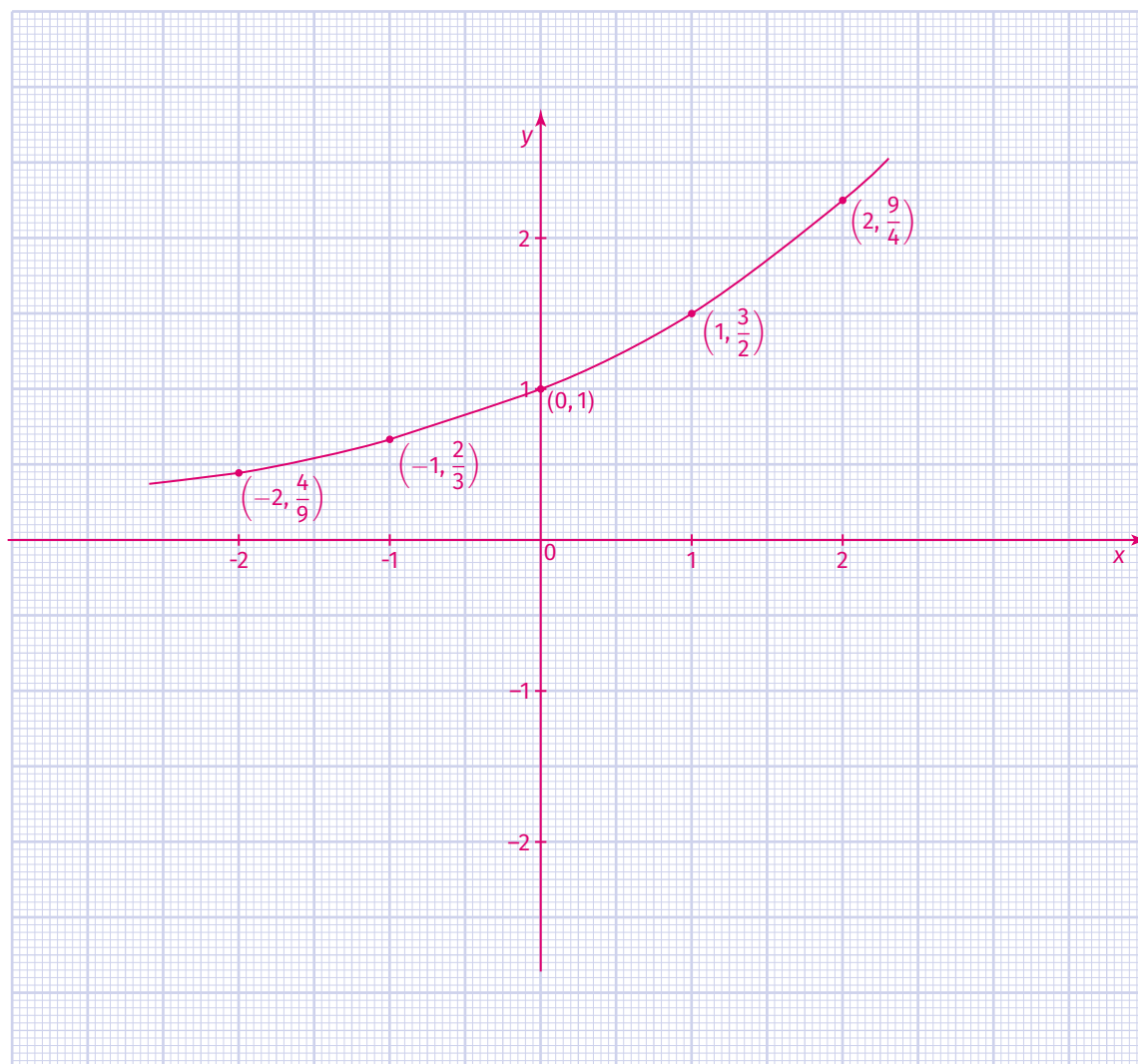
De functie f heeft als voorschrift $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

a) Bereken voor elke x -waarde de overeenkomstige functiewaarde $y = f(x)$. Vul de waardentabel in.

x	-2	-1	0	+1	+2
y	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$

b) Construeer de punten (x, y) uit de waardentabel in een cartesiaans assenstelsel.

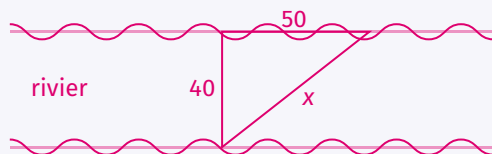
Teken de grafiek van f .



Oefeningenreeks 5 pepers

89

Mats zwemt een rivier over van 40 m breed. Aan de overkant klautert hij uit de rivier 50 m stroomafwaarts. Hoeveel meter heeft Mats gezwommen?



$$\begin{aligned}x^2 &= 40^2 + 50^2 \\x &= \sqrt{1600 + 2500} \\x &= \sqrt{4100} \\x &\approx 64,03\end{aligned}$$

Antwoord: Mats heeft ongeveer 64 m gezwommen.



90

Onderzoek of de volgende driehoek ABC rechthoekig is. Zo ja, welke hoek is 90° ?

- a) $A(5, 6)$
 $B(0, 6)$
 $C(0, 8)$

Driehoek ABC is rechthoekig in $\hat{B}$, want
 $(\sqrt{29})^2 = (\sqrt{25})^2 + (\sqrt{4})^2$.

- b) $A(-10, 2)$
 $B(-5, 2)$
 $C(-10, 6)$

Driehoek ABC is rechthoekig in $\hat{A}$, want
 $(\sqrt{41})^2 = (\sqrt{25})^2 + (\sqrt{16})^2$.



91

Gegeven: $3x^3 + 7x^2 - 12x - 28$

Bepaal alle nulwaarden indien mogelijk.

$$\begin{aligned}3x^3 + 7x^2 - 12x - 28 &= 0 \\x^2(3x + 7) - 4(3x + 7) &= 0 \\(3x + 7)(x^2 - 4) &= 0 \\(3x + 7)(x + 2)(x - 2) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}3x + 7 = 0 & \text{of } x + 2 = 0 & \text{of } x - 2 = 0 \\3x = -7 & x = -2 & x = 2 \\x = -\frac{7}{3} & & \end{array}$$

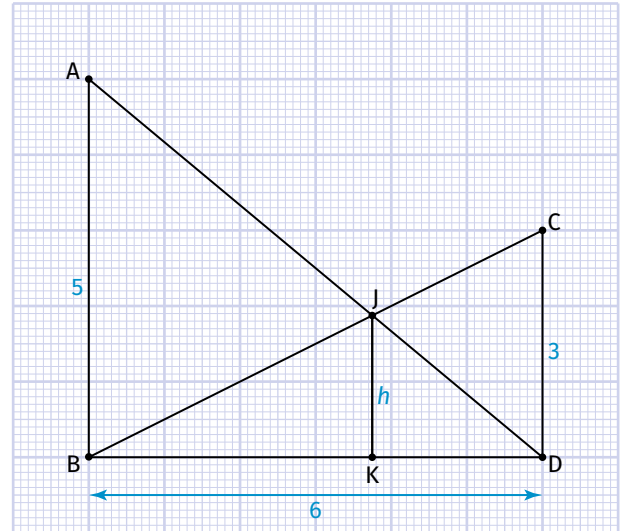


92

Bereken h .

$$\begin{aligned} \bullet \frac{h}{|AB|} &= \frac{|KD|}{|BD|} \\ \frac{h}{5} &= \frac{|KD|}{6} \\ |KD| &= \frac{6}{5}h \\ \bullet |BK| + |KD| &= 6 \\ 2h + \frac{6}{5}h &= 6 \\ \frac{16}{5}h &= 6 \\ h &= \frac{6 \cdot 5}{16} \\ h &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

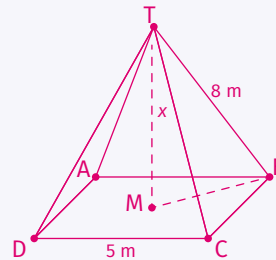
$$\begin{aligned} \bullet \frac{h}{|CD|} &= \frac{|BK|}{|BD|} \\ \frac{h}{3} &= \frac{|BK|}{6} \\ |BK| &= 2h \end{aligned}$$



93

Bereken de hoogte van een piramide met als grondvlak een vierkant met zijde 5 m en opstaande ribben van 8 m.

$$\begin{aligned} \bullet |BD| \text{ in } \triangle BCD \text{ met } \hat{C} &= 90^\circ \\ |BD|^2 &= 5^2 + 5^2 \\ |BD| &= \sqrt{50} \\ \Rightarrow |BM| &= \frac{\sqrt{50}}{2} \\ \bullet x \text{ in } \triangle BMT \text{ met } \hat{M} &= 90^\circ: \\ 8^2 &= x^2 + \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 \\ 8^2 - \frac{50}{4} &= x^2 \\ 51,5 &= x^2 \\ \sqrt{51,5} &= x \\ 7,18 &\approx x \end{aligned}$$



Antwoord: De hoogte is ongeveer 7,18 m.



94

Los op in $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } 2\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}x = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}x$$

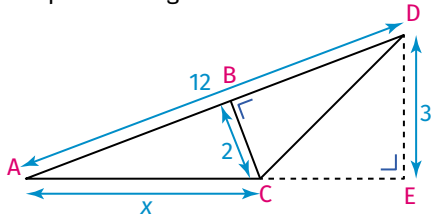
$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3})(2\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}x) &= x + \sqrt{3}x \\ 2\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}x - 2 \cdot 3 + 2\sqrt{3} - 3x &= x + \sqrt{3}x \\ \sqrt{3}x - 3x - x - \sqrt{3}x &= -2\sqrt{3} + 2 + 6 - 2\sqrt{3} \\ -4x &= 8 - 4\sqrt{3} \\ x &= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{-4} \\ x &= -2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{2(x-3)}{5} - \frac{-2(3-x)}{3} - x = \frac{4(1-x)}{3} - \frac{2-x}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{6(x-3)}{15} + \frac{10(3-x)}{15} - \frac{15x}{15} &= \frac{20(1-x)}{15} - \frac{3(2-x)}{15} \\ 6(x-3) + 10(3-x) - 15x &= 20(1-x) - 3(2-x) \\ 6x - 18 + 30 - 10x - 15x &= 20 - 20x - 6 + 3x \\ 6x - 10x - 15x + 20x - 3x &= 20 - 6 + 18 - 30 \\ -2x &= 2 \\ x &= \frac{2}{-2} = -1 \end{aligned}$$



95

Bepaal de lengte x in de onderstaande figuur.

© JWO 2004-2005 eerste ronde

In $\triangle ABC$ en $\triangle AED$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{E} = 90^\circ \\ \hat{A} = \hat{A} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle AED$$

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|ED|}$$

$$\frac{x}{12} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2 \cdot 12}{3}$$

$$x = 8$$

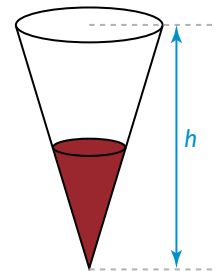


96

Een kegelvormig glas wordt tot op halve hoogte gevuld met 2 cl wijn (zie figuur). Hoeveel cl moet er worden bijgegoten om het te vullen tot het glas halfvol is qua volume?

- a) 1 cl
- b) 2 cl
- c) 4 cl
- d) 6 cl**
- e) 8 cl

© JWO 2003-2004 tweede ronde

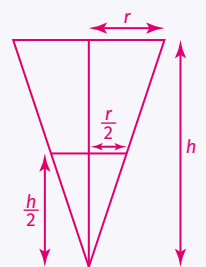


- De doorsnede van de kegel ziet er als volgt uit:

Aangezien de grote driehoek gelijkvormig is met de kleine driehoek met factor 2 (aangezien ze 2 maal zo groot is), is de kleine straal de helft van de grote straal.

- Het volume V_1 bij de beginsituatie is:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 \\ &= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \frac{h}{2} \\ &= \frac{1}{3} \pi \frac{r^2}{4} \frac{h}{2} \\ &= \frac{1}{3} \pi \frac{r^2 h}{8} \\ &= \frac{V}{8} \end{aligned}$$

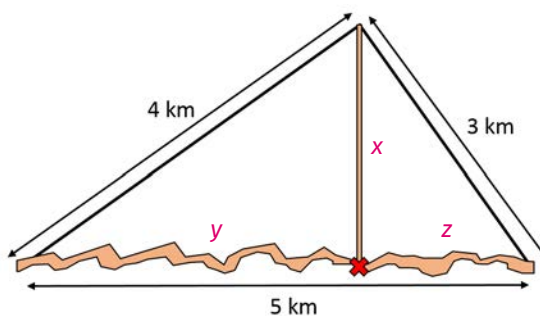


- V_1 is $\frac{1}{8}$ van het totale volume V . $\frac{V}{8}$ is dus gelijk aan $\frac{8 \cdot V_1}{2} = \frac{8 \cdot 2}{2} \text{ cl} = 8 \text{ cl}$.

Er moet dus 6 cl bijgegoten worden om het glas halfvol te vullen.



Een groep voetballertjes gaat op ontdekking in een grot, maar komt vast te zitten nadat de ingang onderstroomt. Uiteindelijk belanden ze op de plaats die met een rood kruis aangeduid is op het diagram hieronder. Reddingswerkers willen de voetballertjes redden door een tunnel te graven vanaf de top van de rechthoekige berg. Hoe diep moeten de reddingswerkers graven om tot bij de voetballertjes te raken?



$$\bullet y \cdot 5 = 4^2$$

$$y = \frac{16}{5}$$

$$\bullet z = 5 - y$$

$$z = 5 - \frac{16}{5}$$

$$z = \frac{9}{5}$$

$$\bullet x^2 = y \cdot z$$

$$x^2 = \frac{16}{5} \cdot \frac{9}{5}$$

$$x = \sqrt{\frac{144}{25}}$$

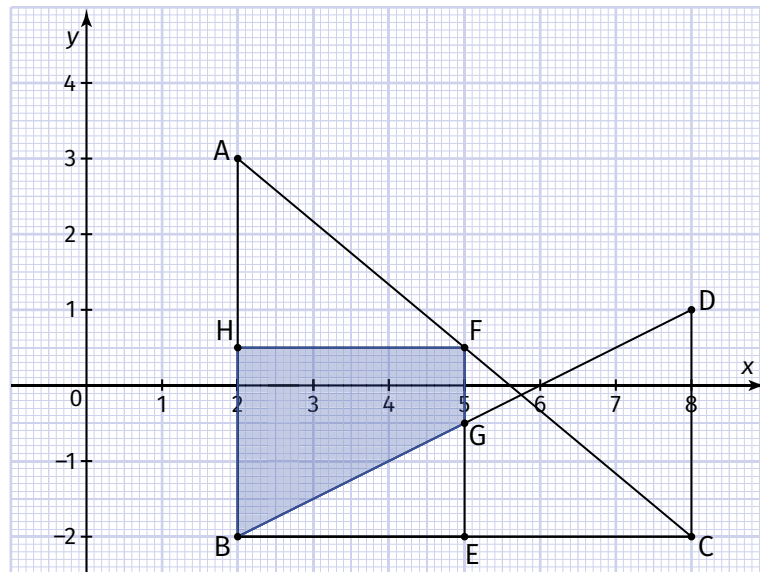
$$x = \frac{12}{5}$$

Antwoord: Ze moeten 2,4 km diep graven.



Gegeven: HF en FE zijn middenparallelle in $\triangle ABC$.

Bereken de oppervlakte van BHFG.



- $|HF| = 3$
 $|HB| = |FE| = 2,5$
- GE is een middenparallelle in $\triangle BCD$
 $(GE \parallel CD \text{ en } |BE| = |EC|)$
 $|GE| = 1,5$
- $|FG| = 2,5 - 1,5 = 1$
- $A_{BHFG} = \frac{|FG| + |HB|}{2} \cdot |HF|$
 $= \frac{1 + 2,5}{2} \cdot 3$
 $= 5,25$



99

a) Leid uit de volgende tabel het functievoorschrift af.

	-6	0	3
x			
$f(x)$	8	3	$\frac{1}{2}$

Diagram illustrating the steps to find the vertex of a parabola using the midpoint formula:

- Step 1: Find the midpoint of the x-coordinates: $\frac{-6 + 3}{2} = -1.5$ (labeled as -5 in the diagram).
- Step 2: Find the midpoint of the y-coordinates: $\frac{8 + \frac{1}{2}}{2} = 4.125$ (labeled as -2,5 in the diagram).
- Step 3: The vertex is at $(-1.5, 4.125)$.

$$f(x) = -\frac{5}{6}x + 3$$

b) Bereken de nulwaarde van de functie f .

$$f(x) = -\frac{5}{6}x + 3$$

$$0 = -\frac{5}{6}x + 3$$

$$\frac{5}{6}x = 3$$

$$x = \frac{3 \cdot 6}{5}$$

$$x = \frac{18}{5}$$

100

Wat is de waarde van x in volgend vierkant?
Duid het juiste antwoord aan.

a) $\frac{ab}{c}$

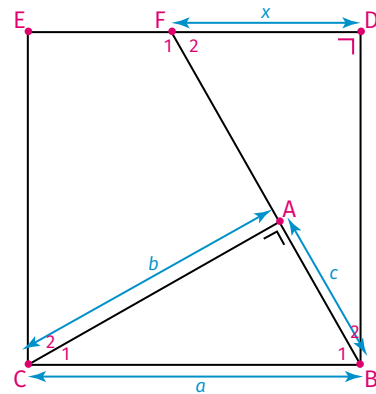
d) $\frac{c}{ab}$

b) $\frac{b}{ac}$

e) c

c) $\frac{ac}{b}$

© VWO 1985-1986 eerste ronde



- $$\begin{aligned} \widehat{E} + \widehat{F}_1 + \widehat{A} + \widehat{C}_2 &= 360^\circ \\ 90^\circ + \widehat{F}_1 + 90^\circ + \widehat{C}_2 &= 360^\circ \\ \widehat{F}_1 + \widehat{C}_2 &= 180^\circ \\ (180^\circ - \widehat{B}_1) + \widehat{C}_2 &= 180^\circ \quad (\text{ED} \parallel \text{CB en snijlijn FB}) \\ \widehat{C}_1 &= \widehat{B}_2 \quad (1) \end{aligned}$$

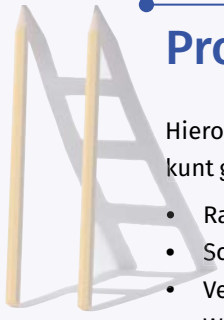
- In $\triangle ABC$ en $\triangle DFB$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B}_1 = \widehat{F}_2 \text{ (ED // CB in snijlijn FB)} \\ \widehat{C}_1 = \widehat{B}_2 \text{ (zie (1))} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \Delta ABC \sim \Delta DFB$$

- $$\frac{|AB|}{|DF|} = \frac{|AC|}{|DB|} = \frac{|BC|}{|FB|}$$

$$\frac{c}{x} = \frac{b}{a} = \frac{a}{|FB|}$$

$$x = \frac{ca}{b}$$



Problemen oplossen met heuristieken

Hieronder vind je twee problemen. Je moet zelf een oplossingsstrategie kiezen en nagaan welke wiskundekennis je kunt gebruiken om het probleem op te lossen.

- Raadpleeg je vademecum om een gepaste heuristiek te kiezen en denk soms out of the box.
- Schrijf jouw oplossing netjes uit zodat je die kunt presenteren voor andere leerlingen.
- Vergelijk jouw oplossing met die van een andere leerling.
- Werk samen en kom tot nieuwe inzichten bij het oplossen van problemen.

Probleem 5

De Rode Duivels feliciteren elkaar na de wedstrijd. Hoeveel keer worden er handen geschud als alle spelers die op het veld staan (van 1 ploeg) elkaar exact 1 keer feliciteren?

Gekozen heuristiek: **Patronen en regelmaat herkennen**

De eerste speler schudt handen met speler 2 tot en met 11 dus 10 keer.

De tweede speler schudt handen met speler 3 tot en met 11 dus 9 keer.

Enz.

$$10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$$

Antwoord: Er worden in totaal 55 keer handen geschud.

Probleem 6

In een emmer zit er 6 liter water. Er wordt een grote steen in de emmer gelegd, waardoor het niveau van het water met $\frac{1}{3}$ stijgt. Welk volume neemt de steen in?

Gekozen heuristiek: **Het probleem oplossen door een vergelijking of een formule op te stellen.**

Het volume van de steen is gelijk aan het volume van de vloeistof die verplaatst wordt.

$$\begin{aligned} V_{\text{steen}} &= \frac{1}{3} \cdot V_{\text{water}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 6 \text{ liter} \\ &= 2 \text{ liter} \end{aligned}$$



Wiskunde in de economie: de budgetlijn

In de economie gebruikt men de budgetlijn om te tonen wat je moet opofferen als je moet kiezen tussen twee producten, bij een bepaald budget.

Je hebt 30 euro waarmee je op de markt pannenkoeken (6 euro/kg) of aardbeien (5 euro/kg) kan kopen. Je vindt beide producten even lekker.



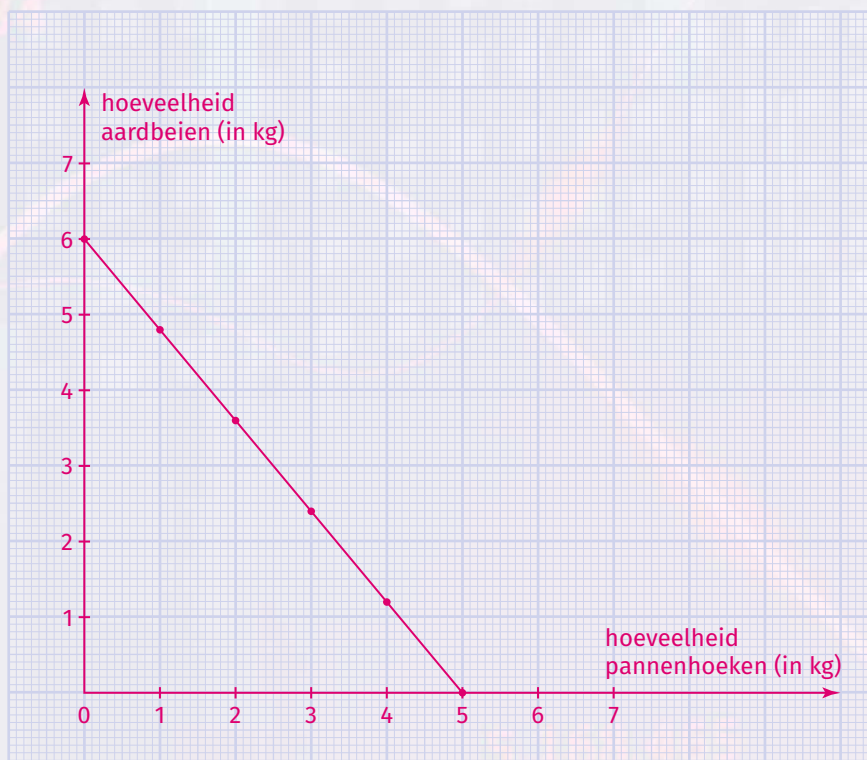
a) Vul aan.

Als je 5 kg pannenkoeken koopt, dan kan je nog 0 kg aardbeien kopen.

Als je 0 kg pannenkoeken koopt, dan kan je nog 6 kg aardbeien kopen.

b) Vervolledig de tabel en teken de grafiek.

Op de horizontale as van de grafiek plaatsen we de hoeveelheid pannenkoeken (in kg) en op de verticale as plaatsen we de hoeveelheid aardbeien (in kg).



BUDGET: 30 EURO	
hoeveelheid pannenkoeken (in kg)	hoeveelheid aardbeien (in kg)
0	6
1	4,8
2	3,6
3	2,4
4	1,2
5	0

c) Het punt (2,5; 3) ligt ook op de budgetlijn. Wat betekent dit?

Met een budget van 30 euro kun je 2,5 kg pannenkoeken en 3 kg aardbeien kopen.

d) Stel een functievoorschrift op dat hoort bij de grafiek van de budgetlijn.

$$f(x) = -\frac{6}{5}x + 6$$

e) Het budget wordt verdubbeld. Wat gebeurt er met de grafiek?

De grafiek schuift naar boven met 6 eenheden.

f) Geef het functievoorschrift van de nieuwe budgetlijn.

$$f(x) = -\frac{6}{5}x + 12$$

g) Behoort (5, 6) tot de nieuwe budgetlijn? Toon aan.

$$\text{ja, want } -\frac{6}{5} \cdot 5 + 12 = 6$$

Behoort (3, 8) tot de nieuwe budgetlijn? Toon aan.

$$\text{nee, want } -\frac{6}{5} \cdot 3 + 12 \neq 8$$

h) Er is een heel groot aanbod aan aardbeien en daarom daalt de prijs naar 4 euro/kg. Geef een functievoorschrift dat hoort bij de budgetlijn (met een budget van 60 euro).

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 15$$

